



Уральский
федеральный
университет

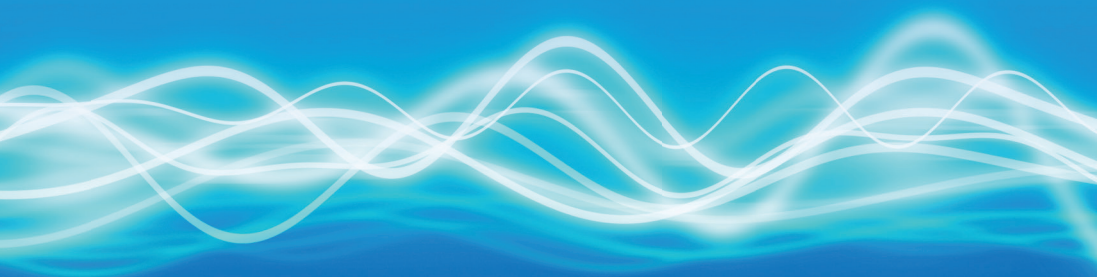
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт
фундаментального
образования

Л. Г. МАЛЫШЕВ
А. А. ПОВЗНЕР

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КУРСА ФИЗИКИ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. Г. Малышев
А. А. Повзнер

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КУРСА ФИЗИКИ. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
в качестве **учебного пособия**
для студентов инженерно-технических
специальностей и направлений

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 537.86(075.8)

ББК 22.336я73

М20

Рецензенты:

проф., д-р физ.-мат. наук А.Д. Ивлиев РГППУ;

доц., д-р физ.-мат. наук О.А. Чикова (УрГПУ)

Научный редактор — проф., д-р физ.-мат. наук А.В. Мелких

На обложке использовано изображение с сайта <http://presentmomentproductions.com/wp-content/uploads/vibration.jpg>

Малышев, Л. Г.

М20 Избранные главы курса физики. Колебания и волны: учебное пособие / Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, — 2017. — 200 с.

ISBN 978-5-7996-1998-5

Учебное пособие «Избранные главы курса физики. Колебания и волны» предназначено для студентов УрФУ, обучающихся на физических и инженерно-физических направлениях подготовки, изучающих курс общей физики в соответствии с рабочей программой курса «Общая физика» и образовательными стандартами. Учебное пособие содержит изложение материала лекций, обсуждение основных физических законов и соотношений. Изложение материала сопровождается подробным анализом и решением большого числа задач и примеров. Использование студентами данного учебного пособия позволит улучшить уровень их подготовки по данному разделу курса «Физика».

Рис. 74.

УДК 537.86(075.8)

ББК 22.336я73

ISBN 978-5-7996-1998-5

© Уральский федеральный университет, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие посвящено изложению с единых позиций колебательных и волновых процессов и явлений, встречающихся в механике, акустике и электромагнетизме. Основная идея предлагаемой книги заключается в том, чтобы соединить в одном учебном пособии изложение принципов теории и практические методы решения задач, дополняющих основные законы и теоретические положения. При изложении теоретического материала авторы стремились к обсуждению основных законов, не детализируя вопросы, имеющие второстепенный характер, и излагая отдельные факты лишь в той мере, в какой они необходимы для понимания целого. Основной акцент в изложении делается на физическую природу рассматриваемых явлений.

Книга создана на основе лекций, читавшихся студентам Физико-технологического института Уральского федерального университета.

Авторы.

ГЛАВА 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. ОДНОМЕРНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Колебаниями называются процессы, которые характеризуются той или иной степенью повторяемости. *Свободными* или *собственными* называют колебания, которые происходят в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе. Такая система называется *осциллятором*. Простейшим видом колебаний являются *гармонические колебания*, происходящие по закону синуса или косинуса.

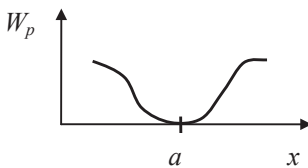


Рис. 1.1

Рассмотрим свободные одномерные колебания, происходящие, например, вдоль оси x . Свободные колебания происходят относительно *положения равновесия*, которому соответствует *минимум* потенциальной энергии системы (рис. 1.1). Для простоты будем считать, что значение потенциальной энергии системы в положении равновесия равно нулю. Разложим W_p в ряд Тейлора вблизи положения равновесия:

$$W_p = W_p(a) + W_p'(x)_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2!}W_p''(x)_{x=a}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}W_p'''(x)_{x=a}(x-a)^3 + \dots \quad (1.1)$$

Первый член разложения равен нулю из-за нашего выбора нулевого уровня отсчета W_p . Второй также обращается в нуль — первая производная потенциальной энергии равна нулю в точке минимума. Будем считать колебания *малыми* (это важно!), и тогда можно ограничиться в разложении первым ненулевым членом — это третий член, и он содержит вторую производную W_p (она положительна в точке минимума). Все высшие члены разложения отбрасываем в силу их малости.

Введем обозначения: $W_p'(x)_{x=a} = \kappa, (\kappa > 0)$, $x - a = \xi$ — так будем обозначать смещение относительно положения равновесия (это греческая буква *кси*), и тогда разложение (1.1) принимает вполне удобный вид:

$$W_p = \frac{\kappa \xi^2}{2}. \quad (1.2)$$

Воспользуемся связью между силой, действующей на тело (на осциллятор), и его потенциальной энергией

$$F_x = -\frac{dW}{d\xi} = -\kappa \xi. \quad (1.3)$$

Эта сила стремится вернуть тело в положение равновесия, она называется *квазиупругой (как бы упругой) силой*. Такое название возникло вот почему. Формула (1.3) действительно совпадает с выражением для силы упругости. Но сила упругости — вполне конкретная сила, обладающая своей физической природой (она относится к классу электромагнитных сил). Природа квазиупругой силы может быть любой, но она зависит от смещения точно так же, как и упругая сила.

Формула (1.3), кстати, дает возможность понять физический смысл параметра κ — он характеризует *упругие свойства* системы.

Применим второй закон Ньютона для описания движения тела массой m под действием квазиупругой силы

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\kappa \xi.$$

В теории колебаний знак производной по времени обычно изображают в виде точки над соответствующей переменной (вторую производную — двумя точками и так далее). Перепишем последнее уравнение

$$m \ddot{\xi} = -\kappa \xi$$

и преобразуем его

$$\ddot{\xi} + \frac{\kappa}{m} \xi = 0.$$

Коэффициент κ / m — величина положительная, обозначим ее как квадрат некоторой величины ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (1.4)$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (1.5)$$

Это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает малые колебания относительно положения равновесия. Его решение можно записать в виде

$$\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.6)$$

Получили *уравнение гармонических колебаний*. Обсудим параметры, входящие в уравнение (1.6), и рассмотрим в качестве осциллятора частицу, совершающую гармонические колебания:

ξ — смещение частицы относительно положения равновесия в момент времени t ;

A — амплитуда колебаний, т. е. максимальное смещение частицы относительно положения равновесия;

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ — фаза колебания в момент времени t , она характеризует состояние системы;

φ_0 — начальная фаза, то есть фаза в момент времени $t = 0$;

ω_0 — циклическая частота колебаний, характеризующая быстроту изменения фазы.

Помимо рассмотренных используют еще два параметра:

T — период колебаний, это время одного полного колебания;

ν — частота колебаний, равная числу колебаний в единицу времени.

Между ними существует простая связь

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.7)$$

Подведем некоторые итоги. Во-первых, обратим внимание на то, что, формулируя условия задачи, мы совершенно не конкретизировали физическую природу осциллятора. По сути, единственным условием было то, что колебания — малые. Это позволяет сделать очень важный вывод: свободные колебания любой системы относительно положения равновесия являются гармоническими независимо от ее конкретной физической природы, если эти колебания — *малые*. Во-вторых, эти колебания происходят с *собственной* частотой (см. уравнение (1.5)), которая определяется упругими свойствами системы. В-третьих, амплитуда и начальная фаза колебаний определяется лишь начальными условиями. Проще говоря, они зависят только от того как и в какой момент времени мы качнули систему.

Каков критерий малости колебаний? Колебания можно считать малыми до тех пор, пока энергия осциллятора квадратично зависит от смещения относительно положения равновесия.

А что, если колебания не являются малыми в указанном выше смысле? Тогда в разложении (1.1) уже нельзя ограничиться только первым членом, отличным от нуля. Учтем следующий член, и по формуле (1.3) найдем выражение для силы:

$$F_{\xi} = \frac{dW_p}{d\xi} = -W_p''(\xi)_{\xi=0} \xi - \frac{1}{2} W_p'''(\xi)_{\xi=0} \xi^2.$$

Теперь уравнение (1.5) примет вид

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\frac{1}{2} W_p'''(\xi)_{\xi=0} \xi^2.$$

Это уравнение содержит ξ^2 и поэтому является нелинейным. Колебания, описываемые нелинейными уравнениями, являются *ангармоническими* и для них не выполняется принцип суперпозиции.

Задача 1. Частица массой m находится в одномерном силовом поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты x по закону $W_p(x) = a/x^2 - b/x$, где a и b — положительные постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение. Положению равновесия x_0 соответствует минимум потенциальной энергии (рис. 1.2). Найдем его из условия $dW_p/dx = 0$:

$$-\frac{2a}{x^3} + \frac{b}{x^2} = 0, \quad x_0 = \frac{2a}{b}.$$

Вычислим упругую постоянную

$$\kappa = W_p''(x)_{x=x_0} = \frac{6a}{x_0^4} - \frac{2b}{x_0^3} = \frac{b^4}{8a^3}$$

и определим период колебаний по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa}} = \frac{4\pi a}{b^2} \sqrt{2ma}.$$

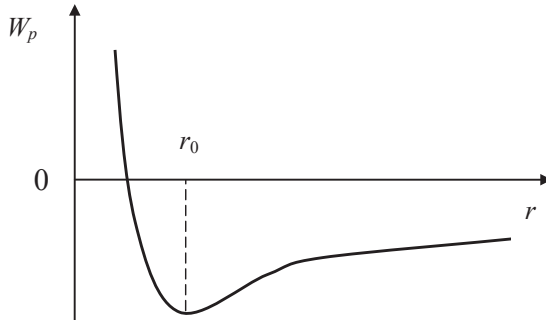


Рис. 1.2

Задача 2. Жидкость объемом $V = 16 \text{ см}^3$ налита в изогнутую U -образную трубку (рис. 1.3) с площадью сечения канала $S = 0,50 \text{ см}^2$. Пренебрегая вязкостью, найти период малых колебаний жидкости.

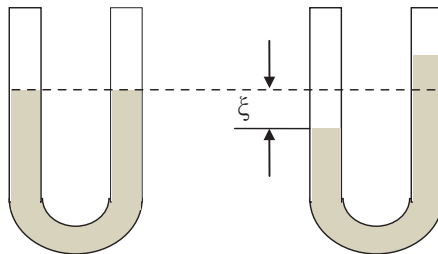


Рис. 1.3

Решение. Предположим, мы каким-то образом вывели систему из положения равновесия и уровень жидкости в левом колене опустился на величину ξ . Соответственно, справа он

поднимется на такую же величину и в правом колене появится избыточный столб жидкости, вес которого будет равен

$$F = \rho g V = 2\rho g S \xi.$$

Эта сила стремится вернуть жидкость в состояние равновесия, т. е. она играет роль квазиупругой силы, про которую говорилось выше. Сопоставляя это выражение с формулой (1.3), видим, что $k = 2\rho g S$, и далее легко получаем ответ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho V}{2\rho g S}} = \pi\sqrt{\frac{2V}{gS}} = 0,8 \text{ с}.$$

Задача 3. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рис. 1.4. Расстояние между осями блоков $l = 20$ см, коэффициент трения между стержнем и блоками $\mu = 0,18$. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания. Найти их период.

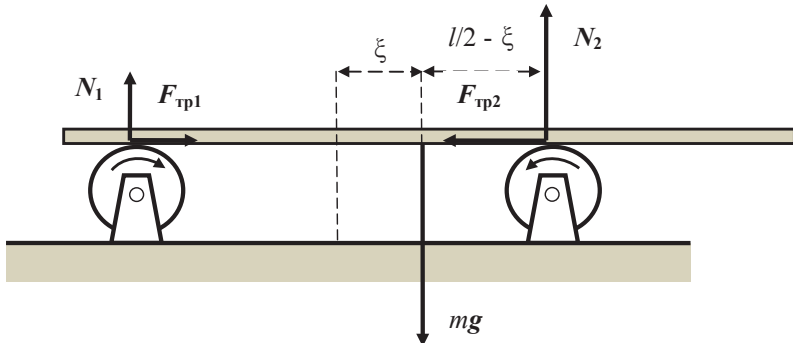


Рис. 1.4

Решение. На стержень действуют пять сил — сила тяжести mg , две силы реакции опоры N_1 и N_2 и две силы трения $F_{тр1}$

и $F_{\text{тр}2}$ (рис. 1.4). В положении равновесия эти силы уравнивают друг друга, но если по каким-то причинам стержень сместится, допустим, вправо на величину ξ , ситуация изменится. Конечно

$$N_1 + N_2 = mg. \quad (1)$$

Но теперь $N_1 < N_2$, поэтому $F_{\text{тр}1} < F_{\text{тр}2}$, т. е. появляется горизонтальная сила, стремящаяся вернуть стержень в положение равновесия, — та самая квазиупругая сила:

$$F_\xi = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = \mu(N_1 - N_2). \quad (2)$$

Это значит, что стержень будет совершать гармонические колебания. Для того чтобы найти силы реакции опоры, воспользуемся правилом моментов: поскольку стержень колеблется в горизонтальном направлении, т. е. поступательно, сумма моментов сил, приложенных к нему, должна быть равна нулю относительно любой точки. В качестве нее выберем точку приложения силы тяжести. В этом есть резон: относительно этой точки обращается в нуль момент силы тяжести. В итоге получаем:

$$N_1 \left(\frac{l}{2} + \xi \right) = N_2 \left(\frac{l}{2} - \xi \right),$$

$$N_1 = N_2 \frac{l - 2\xi}{l + 2\xi}. \quad (3)$$

Подставим это выражение в формулу (1), получим

$$N_2 = \frac{mg}{2l} (l + 2\xi). \quad (4)$$

Теперь по формуле (3) вычислим N_1 и по формуле (2) найдем

$$F_x = -\frac{2\mu mg}{l} \xi.$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.3), находим

$$\kappa = \frac{2\mu mg}{l}$$

и получаем ответ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 1,5 \text{ с.}$$

Задача 4. В установке, изображенной на рис. 1.5, муфта M массой $m = 0,20$ кг закреплена между двумя одинаковыми пружинками, суммарная жесткость которых $k = 20$ Н/м. Муфта без трения может скользить по горизонтальному стержню AB . Установка вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4,4$ рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Найти период малых колебаний муфты. При каком значении ω колебаний не будет?

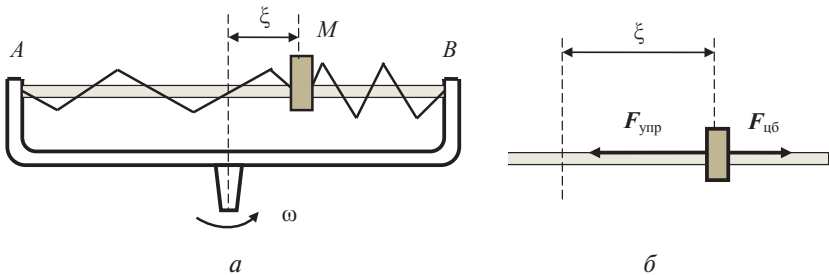


Рис. 1.5

Решение. Прежде всего обсудим условие этой задачи. Предположим для начала, что установка не вращается. В этом случае роль квазиупругой силы играет действительно упругая сила деформированных пружин, возникающая при смещении муфты относительно положения равновесия: $F_x = -k\xi$ и ответ получается сразу по формуле (1.7): $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Но установка вращается, а это значит, что на муфту в системе отсчета, связанной со стержнем, помимо силы упругости будет действовать центробежная сила $F_{цб}$, направленная от центра (см. рис. 1.5, б) и равная

$$F_{цб} = m\omega^2 \xi.$$

Тогда квазиупругую силу можно представить в виде

$$F_x = -(k - m\omega^2) \xi,$$

и, согласно выражению (1.3), $\kappa = k - m\omega^2$.

Нам осталось записать ответ:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}} = 0,7 \text{ с.}$$

В условии есть вопрос о том, при каком значении ω колебаний не будет. Ответ на него следует непосредственно из полученного выражения — колебания возможны, пока $k - m\omega^2 > 0$, т. е. $\omega < \sqrt{k/m}$. Таким образом, предельное значение частоты $\omega = \sqrt{k/m}$. Этот результат понятен: при больших скоростях вращения центробежная сила становится больше силы упругости и муфту просто отбросит и прижмет к одному из концов стержня. Впрочем, если муфта находится на оси вращения, то колебаний не будет вообще, независимо от величины угловой скорости.

1.2. АНАЛИЗ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим частицу, совершающую одномерные гармонические колебания вдоль оси x по закону $\xi = A \cos \omega t$. Найдем ее скорость:

$$v_x = \dot{\xi} = -A\omega \sin \omega t. \quad (1.8)$$

Модуль скорости принимает максимальное значение $v_m = A\omega$ в момент прохождения положения равновесия $\xi = 0$ и обращается в нуль в крайних точках ($\xi = \pm A$).

Вычислим ускорение частицы:

$$a_x = \dot{v}_x = -A\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 \xi. \quad (1.9)$$

При прохождении равновесия ускорение равно нулю — при этом на частицу не действуют силы. Максимальное ускорение частица имеет в крайних точках, и его модуль равен $a_m = A\omega^2$. Это понятный результат — ведь в этих точках квазиупругая сила принимает наибольшее значение.

Кинетическая энергия частицы определяется по формуле

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t, \quad (1.10)$$

и при $\xi = 0$ она принимает максимальное значение, равное

$$(W_k)_{\max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2. \quad (1.11)$$

При $\xi = \pm A$ кинетическая энергия обращается в нуль.

Потенциальную энергию найдем по формуле (1.2)

$$W_p = \frac{\kappa \xi^2}{2} = \frac{1}{2}\kappa A^2 \cos^2 \omega t. \quad (1.12)$$

Она равна нулю при $\xi = 0$, и ее максимальное значение соответствует $\xi = \pm A$:

$$(W_p)_{\max} = \frac{1}{2}\kappa A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = (W_k)_{\max}. \quad (1.13)$$

Найдем полную энергию колебаний

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\kappa A^2. \quad (1.14)$$

Подведем итог. В процессе гармонических колебаний происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Полная энергия колебаний не меняется со временем.

Задача. Два шара с массами $m_1 = 1,0$ кг и $m_2 = 2,0$ кг насажены на гладкий горизонтальный стержень (рис. 1.6). Шары связаны между собой легкой пружинкой с жесткостью $\kappa = 24$ Н/м. Левому шару сообщили начальную скорость $v_1 = 12$ см/с. Найти:

- частоту колебаний системы в процессе движения;
- энергию и амплитуду колебаний.

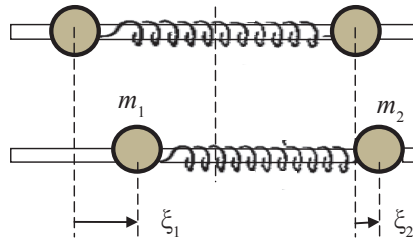


Рис. 1.6

Решение. После того как левому шару сообщили начальную скорость, в системе начались колебания. Пусть в некоторый момент смещение левого шара относительно его положения равновесия оказалось равным ξ_1 , а правого — ξ_2 (рис. 1.6). Деформация пружинки при этом будет $\xi_1 - \xi_2$. Запишем уравнения движения для этих шаров:

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = -\kappa(\xi_1 - \xi_2),$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = \kappa(\xi_1 - \xi_2).$$

Эти уравнения решаются с помощью подстановки $\xi_{1,2} = a_{1,2} e^{i\omega t}$. Применив ее, получим систему

$$\begin{aligned}(\kappa - m_1 \omega^2) a_1 - \kappa a_2 &= 0 \\ -\kappa a_1 + (\kappa - m_2 \omega^2) a_2 &= 0.\end{aligned}$$

Система однородных уравнений имеет решение только в том случае, когда равен нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} (\kappa - m_1 \omega^2) & -\kappa \\ -\kappa & (\kappa - m_2 \omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Расписав его и решив получившееся уравнение, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} = 6 \text{ с}^{-1},$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ называется *приведенной массой* системы.

Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, надо прежде всего понять, как будет двигаться эта система. Это будет поступательное движение системы как целого и колебательное движение шаров. Импульс системы равен $(m_1 + m_2)V_C$, где V_C — скорость движения центра масс системы, и по закону сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V_C,$$

$$V_C = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Механическая энергия системы складывается из энергии поступательного движения и энергии колебаний

$$W = W_{\text{пост}} + W_{\text{кол}} = \frac{(m_1 + m_2)V_C^2}{2} + W_{\text{кол}}.$$

По закону сохранения механической энергии $W = m_1 v_1^2 / 2$, поэтому

$$W_{\text{кол}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) V_C^2}{2} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{\mu v_1^2}{2} = 5 \text{ мДж}.$$

Нам осталось найти амплитуду колебаний. Это сделать легко, используя формулу (1.14):

$$A = \sqrt{\frac{2W_{\text{кол}}}{\kappa}} = \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} v_1 = \frac{v_1}{\omega} = 2 \text{ см}.$$

1.3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Математическим маятником называется частица, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая малые колебания относительно положения равновесия. Пусть масса частицы m и длина нити l (рис. 1.7). Вычислим потенциальную энергию частицы в момент, когда она смещена от положения равновесия на величину ξ :

$$\begin{aligned} W_p &= mgh = mg(l - l \cos \theta) = 2mgl \sin^2 \theta / 2 \approx \\ &\approx \frac{mgl}{2} \theta^2. \end{aligned}$$

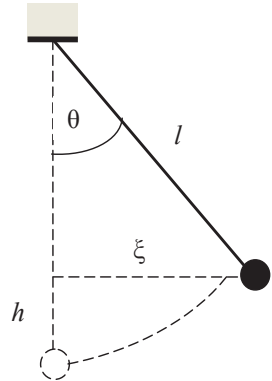


Рис. 1.7

В расчетах учтено, что колебания малые и поэтому $\sin \theta / 2 \approx \theta / 2$.

С другой стороны, $\xi = l \sin \theta \approx l \theta$, поэтому

$$W_p = \frac{mg}{2l} \xi^2$$

и согласно выражению (1.2) $\kappa = mg / l$. Поэтому

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.15)$$

Обратим внимание на то, что период колебаний математического маятника не зависит от его массы.

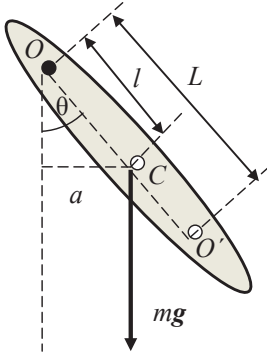


Рис. 1.8

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее горизонтальную ось вращения (рис. 1.8) и совершающее малые колебания относительно положения равновесия. Это тело совершает вращательное движение, поэтому воспользуемся уравнением динамики вращательного движения

$$I_z \varepsilon_z = M_z. \quad (1.16)$$

Разберемся с обозначениями.

I_z — момент инерции тела относительно оси вращения z , которая перпендикулярна плоскости чертежа, направлена к нам и проходит через точку O .

ε_z — проекция вектора углового ускорения на ось z , $\varepsilon_z = \theta_z$, где θ_z — проекция вектора угла поворота на ось z ($|\theta_z| = \theta$). Проще говоря, если тело отклонено вправо от вертикали, то $\theta_z > 0$ и наоборот.

M_z — проекция момента силы тяжести на ось z . По модулю проекция момента равна $|M_z| = mga = mgl \sin|\theta_z| \approx mgl\theta$, а знак зависит от того, в какую сторону отклонено тело: если вправо от вертикали, то $M_z < 0$, если влево — наоборот. Это следует из свойства векторного произведения, определяющего момент силы. Плечо силы a определили исходя из того, что сила тяжести приложена к центру масс тела — точке C . С учетом всего сказанного уравнение (1.16) можно записать в виде

$$I_z \ddot{\theta}_z = -mgl\theta_z$$

или

$$\ddot{\theta}_z + \frac{mgl}{I_z} \theta_z = 0.$$

Введем обозначение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}} \quad (1.17)$$

и получим уравнение

$$\ddot{\theta}_z + \omega_0^2 \theta_z = 0,$$

которое, как известно, описывает гармонические колебания, происходящие с собственной частотой ω_0 и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (1.18)$$

где $L = I_z / ml$ — *приведенная длина* физического маятника. Оценим ее, используя теорему Штейнера: $I_z = I_z^0 + ml^2$, где I_z^0 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, т. е. через точку O . Тогда

$$L = \frac{I_z^0}{ml} + l > l.$$

Нетрудно показать, что период колебаний T' физического маятника относительно точки O' , отстоящей от точки O на расстояние L (см. рис. 1.8), совпадает с периодом колебаний T , определенным по формуле (1.18). Действительно,

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_z'}{mg(L-l)}},$$

и для доказательства достаточно убедиться, что

$$\frac{I'_z}{L-l} = \frac{I_z}{l}.$$

Это несложно сделать, если учесть, что по теореме Штейнера

$$I'_z = I_z^0 + m(L-l)^2 = I_z - ml^2 + m(L-l)^2.$$

Задача 1. Определить период малых колебаний шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длиной $l = 20$ см, если он находится в жидкости, плотность которой в $\eta = 3$ раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости пренебрежимо мало.

Решение. Этот шарик можно считать математическим маятником, и если бы он находился, допустим, в воздухе, мы просто воспользовались бы формулой (1.15). Но шарик находится в жидкости, на него помимо силы тяжести действует выталкивающая сила Архимеда. Поэтому результирующую силу можно представить в виде

$$F = mg - \rho_{\text{ж}} gV = \rho Vg - \rho_{\text{ж}} gV = \rho gV \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = mg \frac{\eta - 1}{\eta}.$$

Таким образом, ускорение свободного падения шарика в жидкости $g' = g(\eta - 1)/\eta$, получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\eta l}{(\eta - 1)g}} = 1,1 \text{ с}.$$

Задача 2. Математический маятник длиной $l_0 = 40$ см и тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см совершают синхронно малые колебания вокруг горизонтальной оси. Найти расстояние от центра стержня до этой оси.

Решение. Синхронность означает равенство периодов колебаний. Второй маятник — физический, поэтому

$$2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgx}}.$$

По теореме Штейнера $I_z = I_z^0 + mx^2$, где $I_z^0 = ml^2 / 12$ — момент инерции стержня массой m относительно оси, проходящей через его центр, x — расстояние от центра стержня до оси вращения. С учетом этого запишем последнее равенство в виде квадратного уравнения

$$12x^2 - 12l_0x + l^2 = 0,$$

решив которое, получим ответ — два значения: $x_1 = 10$ см и $x_2 = 30$ см.

Наличие двух решений — обычное дело для физического маятника, обсуждали это выше, говоря о приведенной длине L . Если, кстати, посчитать ее в нашем случае, то она окажется как раз 40 см.

Задача 3. Два физических маятника совершают малые колебания вокруг одной и той же горизонтальной оси с частотами ω_1 и ω_2 . Их моменты инерции относительно данной оси равны соответственно I_1 и I_2 . Маятники привели в состояние устойчивого равновесия и скрепили друг с другом. Какова будет частота малых колебаний составного маятника?

Решение. Частота малых колебаний составного маятника определяется выражением (1.17)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}},$$

в котором $m = m_1 + m_2$, $I_z = I_1 + I_2$, l — расстояние от оси вращения до центра масс скрепленных маятников, и оно неизвестно. Пусть центр масс первого маятника находится на расстоянии l_1 от оси вращения, а для второго маятника это расстояние рав-

но l_2 . Положение центра масс составного маятника найдем по известной формуле:

$$l = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2},$$

а входящие в нее величины определим из формулы (1.18):

$$m_1 l_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{g}, \quad m_2 l_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{g}.$$

Тогда

$$l = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{g(m_1 + m_2)},$$

и, подставляя это выражение в исходную формулу, получим ответ

$$\omega = \sqrt{\frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1 + I_2}}.$$

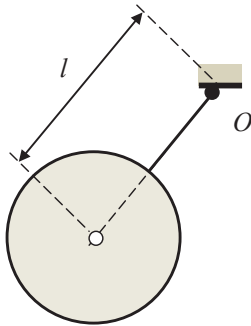


Рис. 1.9

Задача 4. Маятник представляет собой сферический тонкостенный сосуд радиусом R , который целиком заполнен водой. Сосуд укреплен на легком жестком стержне (рис. 1.9). Расстояние между точкой подвеса и центром сосуда равно l . Во сколько раз изменится период малых колебаний такого маятника после того как вода замерзнет? Вязкостью воды и изменением ее объема при замерзании пренебречь.

Решение. «Хитрость» этого условия заключается в том, что до замерзания вода движется поступательно и маятник можно считать математическим. В этом случае период его колебаний определяется по формуле (1.15):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g}}.$$

После замерзания маятник становится физическим и его период следует вычислять по формуле (1.19):

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}.$$

Найдем момент инерции I_z маятника после замерзания воды по теореме Штейнера

$$I_z = I_z^0 + ml^2 = \frac{2}{5}mR^2 + ml^2$$

и получим ответ

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2}.$$

Задача 5. Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 1.10. Известны радиус блока R , его момент инерции I относительно оси вращения, масса тела m и жесткость пружины k . Массы нити и пружины пренебрежимо малы, нить по блоку не скользит, трения в оси блока нет.

Решение. Сделаем некоторые предварительные замечания. В состоянии равновесия сила натяжения нити $F_{\text{нат}0} = mg$, и она уравновешивается силой упругости пружины $F_{\text{упр}0} = k\xi_0$, где ξ_0 — деформация пружины в со-

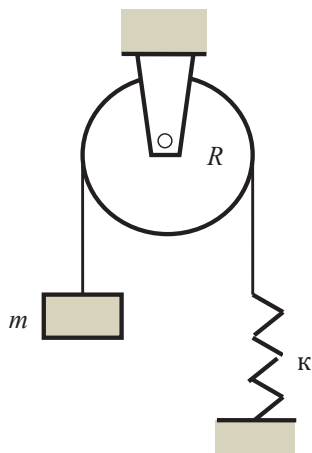


Рис. 1.10

стоянии равновесия, т. е. $mg = \kappa \xi_0$. Если вывести эту систему из положения равновесия, — начнутся колебания. Рассмотрим систему в тот момент времени, когда блок поворачивается против часовой стрелки и совершает поворот на малый угол θ . При этом тело движется с ускорением a , блок — с угловым ускорением ε , а деформация пружины равна $\xi_0 + \xi$.

Запишем уравнение вращательного движения для блока:

$$I\varepsilon = M,$$

$$I\varepsilon = (F_{\text{нат}} - F_{\text{упр}})R,$$

$$I\varepsilon = (m(g - a) - \kappa(\xi_0 + \xi))R,$$

$$I\varepsilon = -(ma + \kappa\xi)R.$$

Учтем, что $a = \varepsilon R = \ddot{\theta}R$, $\xi = \theta R$ (малые колебания), тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa R^2}{I + mR^2} \theta = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, происходящих с собственной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa R^2}{I + mR^2}}.$$

1.4. ОСЦИЛЛЯТОР С ТРЕНИЕМ. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В любой реальной колебательной системе существуют силы трения, действие которых приводит к уменьшению механической энергии колебаний. Этот процесс называется *диссипацией энергии*, а саму систему называют *диссипативной системой*. Силы трения бывают разные. Это могут быть силы трения

скольжения, силы вязкого трения и т. д., и каждая из них подчиняется своим законам и описывается определенными уравнениями. Рассмотрим систему, в которой действуют силы вязкого трения, главной особенностью которых является их пропорциональная зависимость от скорости:

$$F_{\text{тр}} = -r\dot{\xi},$$

где r — коэффициент сопротивления, а знак минус указывает на то, что сила трения направлена противоположно скорости. Такая зависимость, кстати, наблюдается лишь при не очень больших скоростях — с увеличением скорости тела, движущегося в вязкой среде, эта зависимость постепенно переходит в квадратичную зависимость.

Итак, запишем второй закон Ньютона для реального осциллятора, совершающего свободные колебания относительно положения равновесия:

$$ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}},$$

$$m\ddot{\xi} = -k\xi - r\dot{\xi},$$

$$\ddot{\xi} + \frac{r}{m}\dot{\xi} + \frac{k}{m}\xi = 0,$$

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0. \quad (1.19)$$

В последнем уравнении сделано следующее преобразование:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.19) является дифференциальным уравнением, описывающим колебания осциллятора при наличии сил трения; его решение можно записать в виде

$$\xi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.21)$$

где A_0 — амплитуда колебаний в начальный момент времени;
 ω — частота колебаний, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (1.22)$$

Уравнение (1.20) описывает *затухающие колебания* (см. рис. 1.11), амплитуда которых убывает со временем по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1.23)$$

в котором коэффициент β носит название *коэффициент затухания* (определен по формуле (1.20)). Он характеризует быстроту убывания амплитуды затухающих колебаний со временем. Отметим, что частота затухающих колебаний (см. выражение (1.22)) меньше, чем ω_0 , и их период равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.24)$$

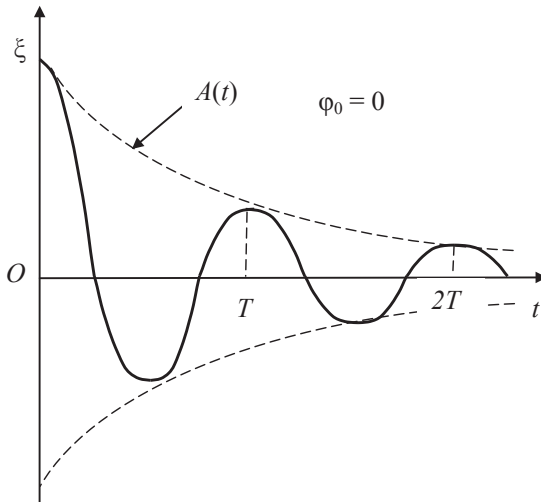


Рис. 1.11

Решение дифференциального уравнения (1.19) получено при условии выполнения довольно жесткого условия: $\omega_0 \gg \beta$, которое говорит о том, что силы сопротивления в системе невелики. В противном случае колебаний как таковых не будет, а будет происходить так называемый *апериодический процесс*, график которого имеет вид, подобный изображенному на рис. 1.12.

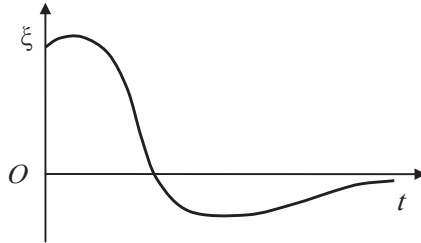


Рис. 1.12

Для характеристики затухающих колебаний вводят следующие параметры.

1. *Логарифмический декремент затухания* λ определяется как логарифм отношения амплитуд в моменты времени, отличающиеся на период колебаний:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (1.25)$$

2. *Добротность* Q осциллятора связана с логарифмическим декрементом затухания соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \quad (1.26)$$

Это очень важная безразмерная величина, характеризующая свойства колебательной системы. Можно показать, что значение добротности, деленное на 2π , равно отношению энергии

осциллятора в данный момент к убыли этой энергии за один период колебания. Так, сейсмические колебания характеризуются добротностью 25–1400, скрипичная струна имеет $Q = 10^3$, а у хорошего камертона $Q = 10^4$. В системах с большой добротностью $\beta \ll \omega_0$, поэтому формулу (1.26) можно упростить:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

3. *Время релаксации* τ — это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = e, \quad \beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (1.27)$$

4. При наличии трения энергия осциллятора уменьшается, превращаясь в тепло, которое выделяется в окружающей среде. Энергия колебаний, согласно формуле (1.14), пропорциональна квадрату амплитуды, которая в свою очередь зависит от времени по закону (1.23). Поэтому зависимость энергии затухающих колебаний от времени можно представить так:

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}, \quad (1.28)$$

где W_0 — энергия осциллятора в начальный момент времени.

Задача 1. Тело совершает крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Найти:

- а) угловую скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ тела в момент $t = 0$;
- б) моменты времени, когда угловая скорость максимальна.

Решение. Угловую скорость найдем по формуле

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (\varphi_0 e^{-\beta t} \cos \omega t) = -\varphi_0 e^{-\beta t} (\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$

Соответственно при $t = 0$ $\dot{\varphi}(0) = -\varphi_0 \beta$.

Вычислим угловое ускорение:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\beta t} \left((\beta^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t \right).$$

При $t = 0$ $\varphi(0) = \varphi_0 (\beta^2 - \omega^2)$.

Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, вспомним, что скорость $\dot{\varphi}$ максимальна при прохождении положения равновесия, а при этом ускорение $\ddot{\varphi} = 0$:

$$(\beta^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\beta\omega \sin \omega t = 0,$$

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega},$$

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left(\operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\omega^2 - \beta^2}{2\beta\omega} \right) + n\pi \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2. Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания $\lambda_0 = 1,50$. Каким будет значение λ , если сопротивление среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

Решение. В данной среде логарифмический декремент затухания λ_0 равен

$$\lambda_0 = \beta_0 T_0 = \frac{2\pi\beta_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta_0^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta_0}\right)^2 - 1}}. \quad (1)$$

При увеличении коэффициента сопротивления r в n раз коэффициент затухания β также возрастет в n раз (формула (1.20)), поэтому выражение (1) можно записать в виде

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^2 - 1}}.$$

Преобразуя выражение (1), найдем

$$\left(\frac{\omega_0}{\beta_0} \right)^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} + 1$$

и получим ответ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{n^2} \left(\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} + 1 \right) - 1}} = 3,3.$$

Для того чтобы колебания стали невозможны, необходимо выполнение условия $T \rightarrow \infty$ и соответственно $\lambda \rightarrow \infty$, т. е. знаменатель последнего выражения должен быть равен нулю. Тогда

$$n = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2} + 1} = 4,3.$$

Задача 3. К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на $\Delta x = 9,8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\lambda = 3,1$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.24) и преобразуем ее:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}},$$

$$T^2 \left(\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{T^2} \right) = 4\pi^2,$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{\Delta x}{g}(4\pi^2 + \lambda^2)} = 0,70 \text{ с.}$$

Здесь при проведении вычислений мы учли, что $\omega_0 = \sqrt{g / \Delta x}$. Эту формулу легко получить, используя выражение (1.5) и равенство сил в состоянии равновесия: $mg = \kappa \Delta x$.

Задача 4. Найти добротность осциллятора, у которого:

а) амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2$ раза через каждые $n = 110$ периодов колебаний;

б) собственная частота $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$ и время релаксации $\tau = 60 \text{ с}$.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний убывает со временем по закону (1.23), поэтому из первого условия следует:

$$\frac{A(t)}{A(t+nT)} = \eta,$$

$$e^{n\beta T} = \eta,$$

$$n\lambda = \ln \eta,$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi n}{\ln \eta} = 5 \cdot 10^2.$$

Для ответа на второй вопрос воспользуемся формулой (1.26):

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 \tau)^2 - 1} = 3,0 \cdot 10^3.$$

Задача 5. Найти добротность математического маятника длиной $l = 50 \text{ см}$, если за промежуток времени $\tau = 5,2 \text{ мин}$ его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta = 4,0 \cdot 10^4$ раз.

Решение. Механическая энергия затухающих колебаний убывает со временем по закону (1.28), поэтому условие задачи можно записать в виде

$$\frac{W_0}{W(\tau)} = e^{2\beta\tau} = \eta,$$

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \ln \eta.$$

Вновь воспользуемся формулой (1.26), а также учтем, что для математического маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$:

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l} \left(\frac{2\tau}{\ln \eta}\right)^2 - 1} = 1,3 \cdot 10^2.$$

Задача 6. Однородный диск радиусом $R = 13$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его край. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 1,00$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.24) и преобразуем ее так, как это сделали в задаче 3:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 + \lambda^2}{\omega_0^2}}.$$

Решение этой задачи свелось, таким образом, к нахождению собственной частоты колебаний физического маятника, которая определяется по формуле (1.18):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}.$$

По условию задачи $l = R$, а момент инерции диска относительно оси вращения легко найдем по теореме Штейнера:

$$I_z = I_z^0 + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Итак,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3R}},$$

$$T = \sqrt{\frac{3R}{2g}(4\pi^2 + \lambda^2)} = 0,9 \text{ с.}$$

Задача 7. Тонкий однородный диск массой m и радиусом R , подвешенный в горизонтальном положении к упругой нити, совершает крутильные колебания в жидкости. Момент упругих сил со стороны нити $M = \alpha\varphi$, где α — постоянная, φ — угол поворота из положения равновесия. Сила сопротивления, действующая на единицу поверхности диска, $F_1 = \eta v$, где η — постоянная, v — скорость данного элемента диска относительно жидкости. Найти частоту малых колебаний.

Решение. Запишем уравнение вращательного движения

$$I_z \ddot{\varphi} = M_{\Sigma z} \quad (1)$$

и посмотрим, что в него включено.

$I_z = mR^2 / 2$ — момент инерции диска относительно оси вращения; $M_{\Sigma z}$ — проекция суммарного момента сил, действующих на этот диск, относительно оси вращения. Она включает в себя момент упругих сил и момент сил сопротивления. Первый из них нам задан, и его проекция на ось вращения z равна $M_z = -\alpha\varphi$ (знак минус указывает на то, что этот момент стремится вернуть диск в положение равновесия), а вот второй необходимо посчитать. Для этого разобьем диск на множество бесконечно тонких колец и рассмотрим одно из них, имеющее радиус r и толщину dr . Силу сопротивления dF_c , действующую на него со стороны жидкости, можно записать так:

$$dF_c = F_1 2\pi r dr = \eta v 2\pi r dr = \eta \dot{\varphi} 2\pi r^2 dr.$$

Проекция момента этой силы на ось z также будет отрицательна и равна

$$dM_{cz} = -dF_{\text{тр}} r = -\eta \dot{\varphi} 2\pi r^3 dr.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$M_{cz} = -\int_0^R \eta \dot{\varphi} 2\pi r^3 dr = -\frac{1}{2} \pi \eta \dot{\varphi} R^4.$$

Итак, уравнение (1) принимает вид

$$I_z \ddot{\varphi} = -\alpha \varphi - \frac{1}{2} \pi \eta R^4 \dot{\varphi}$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{\pi \eta R^2}{m} \dot{\varphi} + \frac{2\alpha}{m R^2} \varphi = 0.$$

Получили дифференциальное уравнение, описывающее затухающие крутильные колебания, которое по форме полностью совпадает с уравнением (1.19). Учитывая обозначения (1.20), приходим к выводу, что

$$\omega_0^2 = \frac{2\alpha}{m R^2}, \quad \beta = \frac{\pi \eta R^2}{2m},$$

и можем записать ответ

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m R^2} - \left(\frac{\pi \eta R^2}{2m} \right)^2}.$$

1.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Наряду с трением на осциллятор может действовать внешняя сила. Особый интерес представляют силы, периодически меняющиеся со временем. Рассмотрим самый простой случай, когда внешняя сила изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \Omega t, \quad (1.29)$$

где F_0 — амплитудное значение внешней (вынуждающей) силы, Ω — ее частота.

Теперь в уравнении (1.19), описывающем движение осциллятора, появится еще один член:

$$ma = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} + F, \quad (1.30)$$

и это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi &= F_0 \cos \Omega t, \\ \ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi &= \frac{F_0}{m} \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (1.31)$$

в котором использованы те же обозначения, что и в выражении (1.20).

Прежде чем обсудить решение этого уравнения, рассмотрим, что произойдет с осциллятором после включения внешней силы. Понятно, что в течение некоторого времени движение осциллятора будет определяться тем, как он двигался до включения внешней силы. Лишь с течением времени влияние этих начальных условий будет ослабевать и движение осциллятора перейдет в режим *установившихся* колебаний. Этот процесс установления колебаний называется *переходным режимом*.

При его рассмотрении самым важным является вопрос о его продолжительности, которая определяется временем затухания собственных колебаний, имеющихся в момент начала действия внешней силы. И это время нам известно — это *время релаксации* τ . Таким образом можно сказать, что если время действия внешней силы $t \gg \tau$, то в системе происходят только установившиеся *вынужденные* колебания, вызванные внешней периодической силой.

Рассмотрим уравнение (1.31). Это неоднородное дифференциальное уравнение, его решение является суммой общего решения однородной его части (а это уравнение (1.19)) и частного решения неоднородного уравнения (1.31). Решением уравнения (1.19) является выражение (1.21), которое описывает затухающие колебания, и при $t \gg \tau$ оно (выражение (1.21)) обращается в нуль. Частное решение уравнения (1.31) имеет вид

$$\xi = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (1.32)$$

где A — амплитуда колебаний, равная

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (1.33)$$

φ — фазовая постоянная, определяемая формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.34)$$

Рассмотрим эти выражения. Как видно из уравнения (1.32), установившиеся вынужденные колебания являются гармоническими и происходят с частотой внешней силы. Это в принципе отличает их от свободных колебаний, собственная частота которых определяется упругими свойствами системы и имеет вполне определенное значение.

Амплитуда вынужденных колебаний (1.33) зависит не только от величины внешней силы, но и от соотношения частот — собственной частоты осциллятора ω_0 и частоты внешней силы Ω . В пределе $\Omega \ll \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2}, \quad (1.35)$$

при $\Omega \gg \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{m\Omega^2} \rightarrow 0. \quad (1.36)$$

Максимального значения амплитуда достигает в случае, когда частота внешней силы оказывается близка к собственной частоте колебаний осциллятора. Для того чтобы найти ее, исследуем на экстремум выражение (1.33), получим

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0.$$

Можно, конечно, непосредственно взять производную от правой части выражения (1.33) и, приравняв ее нулю, найти значение Ω , которое соответствует максимуму амплитуды. Поступим проще — исследуем на экстремум лишь знаменатель правой части (числитель не зависит от Ω) и получим тот же результат:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right) &= 0, \\ 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\beta^2 \Omega &= 0, \\ \Omega_{\text{рез}} &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Полученное значение называется *резонансной частотой*. Ему соответствует амплитуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (1.38)$$

Сравним это значение амплитуды (его называют *резонансным*) с выражением (1.35):

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = Q, \quad (1.39)$$

где Q — добротность осциллятора (см. формулу (1.26)). Эта величина для механических систем, как показано в п. 1.4, может достигать значений 10^2 – 10^3 .

Итак, явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней силы близка к собствен-

ной частоте осциллятора, называется *резонансом*. В ряде случаев эффекты, возникающие при резонансе, могут приводить даже к разрушению системы. Известна популярная история о рухнувшем мосте, по которому проходил полк солдат, маршировавших с частотой, которая оказалась резонансной для этого моста.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы изображена на рис. 1.13.

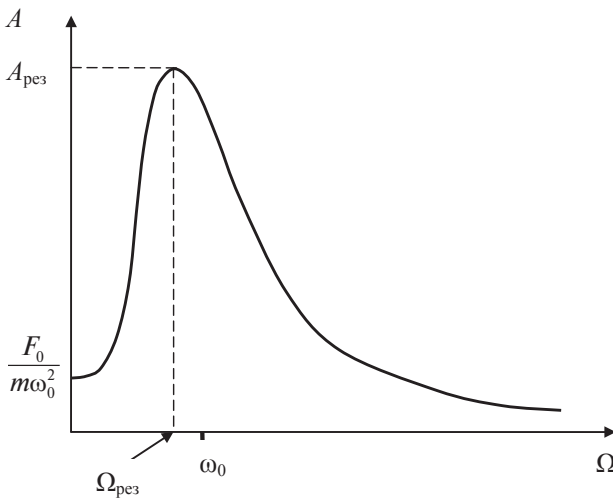


Рис. 1.13

Фазовая постоянная φ , определенная формулой (1.34), показывает разность фаз между вынужденными колебаниями и внешней силой. При $\Omega \ll \omega_0$ $\varphi \rightarrow 0$, тогда как при $\Omega \gg \omega_0$ $\varphi \rightarrow \pi$, т. е. колебания происходят в противофазе с внешней силой и, наконец, при $\Omega = \omega_0$ $\varphi = \pi/2$. График этой зависимости приведен на рис. 1.14.

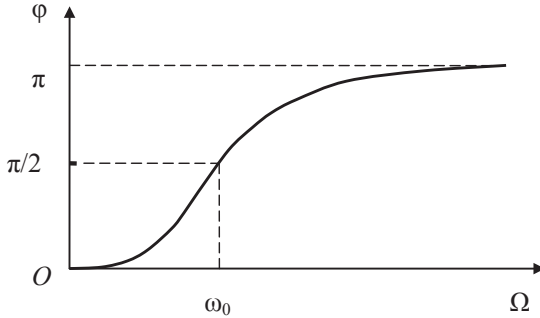


Рис. 1.14

Задача 1. Шарик массой m , подвешенный к пружинке, удлиняет ее на Δl . Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по гармоническому закону с амплитудой F_0 , шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания λ . Пренебрегая массой пружинки, найти частоту Ω вынуждающей силы, при которой амплитуда колебаний шарика будет максимальной. Чему она равна?

Решение. Ясно, что речь идет о резонансе, а это значит, что частота Ω определяется выражением (1.37). Собственную частоту колебаний найдем из условия

$$mg = \kappa l$$

и формулы (1.4):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}.$$

Для того чтобы найти β , воспользуемся выражением (1.25), которое запишем в виде:

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{\lambda \omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Ответ на первый вопрос выглядит так:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l} \frac{4\pi^2 - \lambda^2}{4\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Для ответа на второй вопрос воспользуемся формулой (1.38):

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0\Delta l}{4\pi mg\lambda}(4\pi^2 + \lambda^2).$$

Задача 2. Найти максимальное значение амплитуды колебаний осциллятора, совершающего установившиеся колебания под действием вынуждающей гармонической силы с амплитудой $F_0 = 2,50$ Н, если частота затухающих колебаний данного осциллятора $\omega = 100$ с⁻¹ и коэффициент сопротивления $r = 0,50$ кг/с.

Решение. Для того чтобы записать ответ этой на первый взгляд непростой задачи, нам достаточно воспользоваться выражением (1.38) и вспомнить две формулы — (1.22) и (1.20):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{r}{2m}.$$

Тогда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{r\omega} = 5 \text{ см.}$$

Задача 3. Амплитуды установившихся вынужденных колебаний при частотах $\Omega_1 = 400$ с⁻¹ и $\Omega_2 = 600$ с⁻¹ равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда колебаний будет максимальной.

Решение. Речь здесь, конечно, идет о резонансной частоте $\Omega_{\text{рез}}$. Воспользуемся формулой (1.35), запишем условие задачи в виде

$$(\omega_0^2 - \Omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \Omega_1^2 = (\omega_0^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\beta^2 \Omega_2^2$$

и проведем ряд несложных преобразований:

$$\Omega_1^2 (\Omega_1^2 - 2(\omega_0^2 - 2\beta^2)) = \Omega_2^2 (\Omega_2^2 - 2(\omega_0^2 - 2\beta^2)),$$

$$\Omega_1^2 (\Omega_1^2 - 2\Omega_{\text{рез}}^2) = \Omega_2^2 (\Omega_2^2 - 2\Omega_{\text{рез}}^2),$$

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}.$$

Задача 4. Некоторая резонансная кривая соответствует осциллятору с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = 1,60$. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды колебаний к амплитуде колебаний при очень малой частоте.

Решение. Речь в этой задаче идет о вычислении отношения (1.39):

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\omega_0^2}{2\beta^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}}.$$

Чтобы его посчитать, воспользуемся формулой (1.25) и преобразуем ее с учетом выражения (1.22):

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}},$$

$$\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\frac{\omega_0^2}{\beta^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + 1.$$

Получим

$$\frac{A_{\text{рез}}}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + 1 \right) \frac{\lambda}{2\pi} = \left(1 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \right) \frac{\pi}{\lambda} = 2,1.$$

Задача 5. Под действием внешней вертикальной силы $F = F_0 \cos \omega t$ тело, подвешенное на пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону $\xi = a \cos(\omega t - \varphi)$. Найти работу этой силы за период колебаний.

Решение. Элементарная работа силы определяется выражением

$$dA = F d\xi = F_0 \cos \omega t (-a\omega) \sin(\omega t - \varphi) dt,$$

и работу этой силы за период можно легко посчитать:

$$\begin{aligned} A &= -F_0 a \omega \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt = \\ &= -\frac{1}{2} F_0 a \omega \int_0^{2\pi/\omega} (-\sin \varphi + \sin(2\omega t - \varphi)) dt = \pi F_0 a \sin \varphi. \end{aligned}$$

Задача 6. Под действием момента сил $M_z = M_m \cos \omega t$ тело совершает вынужденные крутильные колебания по закону $\varphi = \varphi_m \cos(\omega t - \alpha)$. Найти работу сил трения, действующих на тело, за период колебания.

Решение. Для начала найдем работу за период момента сил M_z . Расчеты, совершенно аналогичные проделанным в предыдущей задаче, дают тот же результат: $A = \pi M_m \varphi_m \sin \alpha$. Возникает вопрос: а на что пошла эта работа? Ответ: На работу против сил трения. Поэтому

$$A_{\text{тр}} = -\pi M_m \varphi_m \sin \alpha.$$

Задача 7. Шарик массой $m = 50$ г подвешен на невесомой пружинке жесткостью $\kappa = 20,0$ Н/м. Под действием вертикальной гармонической силы с частотой $\Omega = 25,0$ с⁻¹ шарик совершает установившиеся колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти добротность данного осциллятора.

Решение. Добротность Q — это характеристика осциллятора, и она определяется выражением (1.26)

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta},$$

в которой $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$, а коэффициент затухания β легко найдем из формулы (1.36):

$$\beta = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)}{2\Omega} \operatorname{tg} \varphi.$$

Ответ выглядит так:

$$Q = \sqrt{\frac{\kappa \Omega^2}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{1}{4}} = 2,2.$$

Задача 8. Шарик массой m , подвешенный на невесомой пружинке, может совершать вертикальные колебания с коэффициентом затухания β . Собственная частота колебаний ω_0 . Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по закону $F = F_0 \cos \Omega t$, шарик совершает установившиеся гармонические колебания. Найти:

- среднюю за период колебания мощность P силы F ;
- частоту вынуждающей силы, при которой P максимальна;
- чему равна $P_{\text{макс}}$?

Решение. Работу внешней силы за период колебаний ранее уже вычисляли в задаче 5:

$$A = \pi F_0 a \sin \varphi.$$

Амплитуда этих колебаний определяется выражением (1.35)

$$a = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

а $\sin \varphi$ найдем из формулы (1.36) посредством несложных преобразований:

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

Итак,

$$A = \frac{2\pi\beta F_0^2 \Omega}{m \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right)}.$$

Среднюю за период колебания мощность P силы F определим так:

$$P = \frac{A}{T} = \frac{A\Omega}{2\pi} = \frac{\beta F_0^2 \Omega^2}{m \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right)}.$$

Для того чтобы ответить на второй вопрос, необходимо исследовать это выражение на экстремум, т. е. взять производную $dP/d\Omega$ и приравнять ее нулю. Эта процедура довольно утомительная, но, в принципе, несложная. Поэтому сразу запишем ответ:

$$\Omega = \omega_0.$$

Подставляя это значение в исходную формулу, ответим и на последний вопрос задачи:

$$P_{\text{макс}} = \frac{F_0^2}{4\beta m}.$$

1.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

В п. 1.1 было получено однородное дифференциальное уравнение второго порядка (1.5), которое описывает малые колебания осциллятора относительно положения равновесия

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (1.40)$$

и отмечено, что его решение можно записать в виде

$$\xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.41)$$

Справедливость этого утверждения проверяется очень просто — подстановкой выражения (1.41) в уравнение (1.40).

Но выражение (1.41) *не является* общим решением уравнения (1.40). Согласно теории дифференциальное уравнение такого вида решается с использованием подстановки $\xi = Ce^{\lambda t}$, где C и λ — комплексные постоянные. Подставляя ее в уравнение (1.40), получим *характеристическое* уравнение

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

и два его решения $\lambda_1 = i\omega_0$ и $\lambda_2 = -i\omega_0$, где i — мнимая единица ($i^2 = -1$).

Таким образом, общим решением уравнения (1.40) будет являться *суперпозиция*

$$\xi = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

А если учесть, что $C_{1,2}$ — это комплексные величины и представить их в виде $C_1 = A_1 e^{i\varphi_{01}}$, $C_2 = A_2 e^{-i\varphi_{02}}$, то окончательно это решение принимает весьма громоздкий вид

$$\xi = A_1 e^{i(\omega_0 t + \varphi_{01})} + A_2 e^{-i(\omega_0 t + \varphi_{02})}. \quad (1.42)$$

Это выражение при любых значениях входящих в него коэффициентов является решением уравнения (1.40) и, следовательно, описывает тот или иной гармонический процесс, протекающий с частотой ω_0 .

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $A_1 = A_2 = A/2$, $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$. Тогда в соответствии с известными формулами

$$\xi = \frac{1}{2} A \left(e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

получим уравнение (1.41).

2. Если рассмотреть случай $A_1 = -A_2 = A/2$, $\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0$, то придем к уравнению $\xi = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

3. Пусть $A_1 = A$, $A_2 = 0$, $\varphi_{01} = \varphi_0$. Тогда

$$\xi = A e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)}. \quad (1.43)$$

Получили уравнение гармонических колебаний в *комплексной* форме. Использование этого уравнения при описании колебаний связано с чисто практическими соображениями: складывать, умножать, дифференцировать, интегрировать и т. д. показательные функции значительно проще и удобнее, чем функции тригонометрические. Поэтому большинство расчетов в теории колебаний производится в комплексном виде с использованием уравнений типа (1.43), а в конце берется реальная часть полученного выражения. Действительно, если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

то

$$\operatorname{Re}\{e^{ix}\} = \cos x, \quad \operatorname{Im}\{e^{ix}\} = \sin x.$$

Рассмотрим еще кое-что, относящееся к комплексным числам. Любое такое число можно представить как $z = x + iy$ и изо-

бразить на комплексной плоскости в виде точки (рис. 1.15). Но его можно записать и по-другому:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Поясним проделанное. Мы умножили и разделили z на $\sqrt{x^2 + y^2}$. (Обратим внимание на то, что $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — это длина радиус-вектора, проведенного из начала координат в точку z). Слагаемые, стоящие в скобках, меньше единицы, а их сумма квадратов равна единице. Это означает, что их можно представить как синус и косинус некоторого угла φ , который определяется из условия

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Ну и, наконец, — формула Эйлера, т. е. комплексному числу можно сопоставить вектор в плоскости (x, iy) , изображенный на рис. 1.15.

А теперь рассмотрим формулу (1.43). Что будет, если изобразить эту величину в виде вектора в комплексной плоскости? Длина его равна A , он образует с осью x угол $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, и этот угол увеличивается со временем. Получили вектор (рис. 1.16), который

вращается в комплексной плоскости с угловой скоростью ω_0 , и его проекция на ось x изменяется со временем по закону

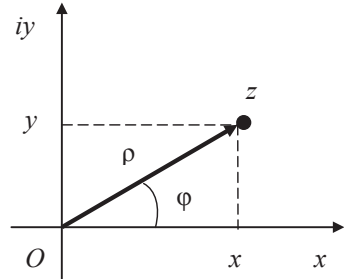


Рис. 1.15

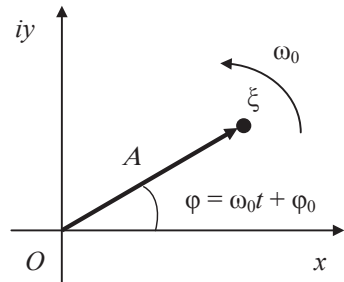


Рис. 1.16

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Введем систему координат (x', iy') , вращающуюся относительно системы (x, iy) с той же угловой скоростью ω_0 (рис. 1.17). В этой системе вектор ξ будет покоиться, образуя с осью x' угол φ_0 .

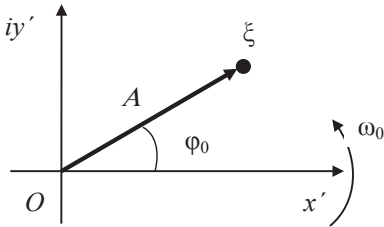


Рис. 1.17

Итак, сформулируем важный вывод, который нам пригодится в дальнейшем: любое гармоническое колебание можно представить в виде вектора в системе координат (x', iy') , вращающейся с угловой скоростью ω_0 относительно покоящейся системы (x, iy) .

1.7. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ. БИЕНИЯ

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Нас будет интересовать их сумма $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

Найти ее можно, просто сложив эти два выражения, и после определенных тригонометрических преобразований получить ответ в виде $\xi = A \cos(\omega t + \varphi)$ с вычисленными значениями A и φ .

А если складываются не два колебания, а, допустим, три? Эту задачу тоже можно решить, потратив довольно много времени на рутинные преобразования.

Узнаем, как можно легко складывать любое количество таких колебаний. Для этого прежде всего запишем уравнения наших колебания в комплексной форме:

$$\xi_1 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \quad \xi_2 = A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

и сложим их:

$$\xi = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} = A e^{i\varphi} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (1.44)$$

Видим, что результирующие колебания действительно происходят с той же частотой ω . Но как найти A и φ ? Для этого применим метод, описанный в предыдущем параграфе, — перейдем в систему отсчета, вращающуюся с угловой скоростью ω . В ней эти колебания изображаются в виде двух векторов (рис. 1.18), и их сумма дает результирующее колебание.

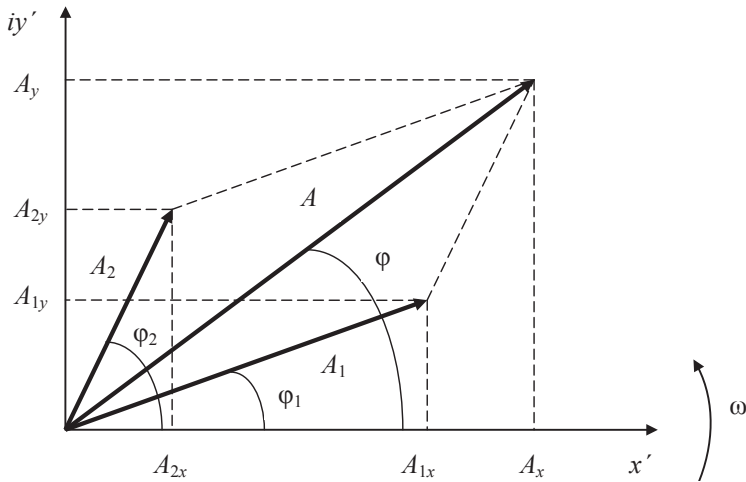


Рис. 1.18

Вычисление амплитуды и начальной фазы этого колебания не представляет труда. Из построений, изображенных на рис. 1.18, следует, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1.45)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_{1y} + A_{2y}}{A_{1x} + A_{2x}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.46)$$

Из формулы (1.45) следует, что если $\varphi_1 = \varphi_2$ (колебания имеют одинаковые фазы), то $A = A_1 + A_2$. Если же разность фаз равна π (колебания происходят в противофазе), то $A = |A_1 - A_2|$.

Итак, представление гармонических колебаний в виде векторов дает возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения соответствующих векторов. Этот способ отличается от тригонометрических преобразований простотой и наглядностью. Он бывает особенно полезен, например, в оптике, где световые колебания в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от разных участков волнового фронта.

Рассмотрим еще один пример, когда складываются колебания с *близкими* частотами:

$$\xi_1 = A_1 \cos \omega t, \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t, \quad \Delta\omega \ll \omega.$$

Запишем эти уравнения в комплексной форме

$$\xi_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad \xi_2 = A_2 e^{i(\omega + \Delta\omega)t}$$

и найдем их сумму

$$\xi = (A_1 + A_2 e^{i\Delta\omega t}) e^{i\omega t}. \quad (1.47)$$

Эти колебания происходят с частотой ω (об этом говорит множитель $e^{i\omega t}$), но их амплитуда (выражение, стоящее в скобках) зависит от времени. Разберемся с этим, воспользовавшись векторной диаграммой во вращающейся системе отсчета (см. рис. 1.19, *а*). Первому колебанию соответствует вектор, направленный вдоль оси x' . Частота второго колебания отличается от ω на величину $\Delta\omega$, поэтому второй вектор (изобразим его

выходящим из конца первого вектора) будет вращаться относительно системы отсчета (x', iy') с угловой скоростью $\Delta\omega$. Модуль $A(t)$ вектора, описывающего результирующее колебание, меняется со временем по гармоническому закону с частотой $\Delta\omega$ в пределах от $|A_1 - A_2|$ до $A_1 + A_2$. Таким образом, возникает периодическое изменение амплитуды результирующих колебаний, происходящее на разностной частоте $\Delta\omega$ и имеющее период $T = 2\pi / \Delta\omega$. Это явление получило название *биений*.

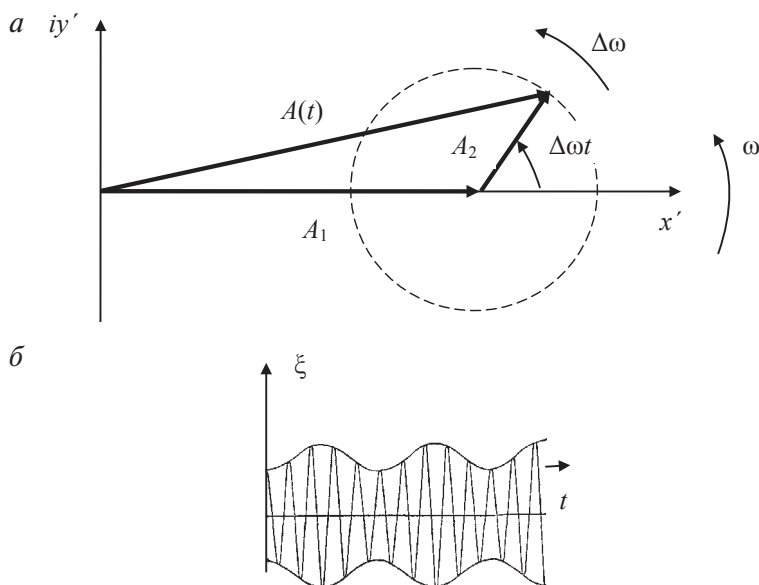


Рис. 1.19

На рис. 1.19, б изображен вид биений, возникающих при сложении двух колебаний, соответствующих отношению частот $\omega / \Delta\omega = 5$.

Задача. Найти графически амплитуду A колебаний, возникающих при сложении следующих колебаний одного направления:

$$\xi_1 = 3,0 \cos \omega t, \quad \xi_2 = 5,0 \cos(\omega t + \pi/4), \quad \xi_3 = 6,0 \sin \omega t.$$

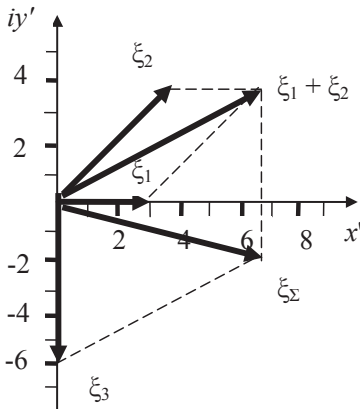


Рис. 1.20

Решение. Запишем третье уравнение в виде $\xi_3 = 6,0 \cos(\omega t - \pi/2)$ и перейдем к комплексной форме записи

$$\xi_1 = 3,0e^{i\omega t}, \quad \xi_2 = 5,0e^{i(\omega t + \pi/4)}, \\ \xi_3 = 6,0e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

Воспользуемся графическим методом (рис. 1.20) и построим вектор ξ_Σ , который представляет результирующее колебание. Его модуль и есть искомая амплитуда A , величину которой найдем графически: $A = 7$.

1.8. СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ. ФИГУРЫ ЛИССАЖУ

Рассмотрим частицу, которая может совершать колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях, допустим, в плоскости вдоль осей x и y . В этом случае говорят, что частица *обладает двумя степенями свободы*. Предположим, что частоты этих независимых колебаний одинаковы и равны ω . Частоту, одинаковую для независимых колебаний, называют *вырожденной*.

Запишем уравнения этих колебаний в виде:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.48)$$

где φ — разность фаз этих колебаний.

Найдем уравнение траектории, по которой будет двигаться частица в плоскости (x, y) . Для этого выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{x}{a}, \\ \frac{y}{b} &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi = \\ &= \cos \omega t \cos \varphi - \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} \sin \varphi = \frac{x}{a} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi, \end{aligned}$$

и после несложных действий получим искомое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (1.49)$$

Это уравнение эллипса, ориентированного определенным образом относительно осей x и y .

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $\varphi = 0$. Тогда уравнение (1.49) принимает вид

$$y = \frac{b}{a} x, \quad (1.50)$$

а колебания частицы относительно начала координат будут описываться уравнением

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t. \quad (1.51)$$

Эти колебания будут происходить вдоль прямой, образующей угол θ с осью x (см. рис. 1.21, а), причем этот угол определяется выражением $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

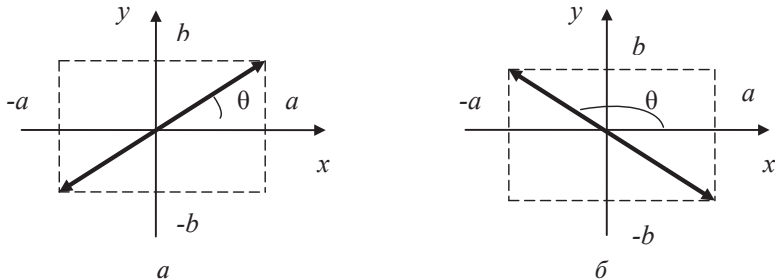


Рис. 1.21

2. Пусть $\varphi = \pi$. Тогда

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad (1.52)$$

и колебания будут происходить вдоль прямой, изображенной на рис. 1.21, б.

3. Интересный результат получается, если взять $\varphi = \pi/2$. В этом случае уравнение (1.49) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, с полуосями, равными a и b (см. рис. 1.22). При равенстве амплитуд этот эллипс превращается в окружность.

Таким образом установлена форма траектории, но пока не ясно, в каком направлении будет двигаться частица. Разберемся с этим вопросом. Пусть в начальный момент времени частица находилась в точке 1 на оси x (см. рис. 1.22). В следующие моменты времени ее координата x будет уменьшаться (оставаясь положительной), тогда как ее координата y будет отрицательной (см. формулу (1.48)): $y = b \cos(\omega t + \pi/2) = -b \sin \omega t$. Это значит, что частица будет двигаться по часовой стрелке.

Найдем угловую скорость, с которой будет двигаться частица:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \omega t.$$

Упростить это выражение можно в случае равенства амплитуд. Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \omega t = \operatorname{tg}(-\omega t), \quad \theta = -\omega t,$$

что и показано на рис. 1.22. Если поменять условие и сделать $\varphi = -\pi/2$, то направление движения изменится на противоположное.

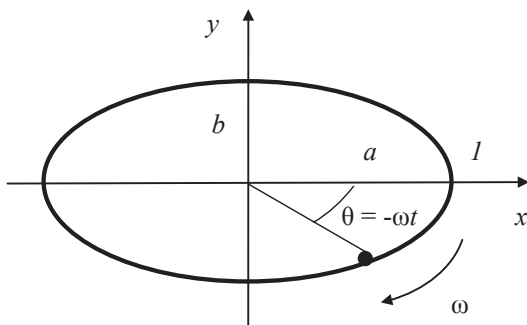


Рис. 1.22

Траектории, по которым движется частица, совершающая взаимно перпендикулярные колебания в плоскости (x, y) , называются *фигурами Лиссажу*.

Мы рассмотрели самый простой случай равенства частот этих колебаний. Если эти частоты не равны, то вид фигур Лиссажу может иметь (и имеет!) сложный вид, и их форма зависит от соотношения частот складываемых колебаний. На рис. 1.23, *a* изображена траектория движения частицы, когда частота ω_x колебаний в направлении оси x в два раза больше, чем частота ω_y . Для траектории, изображенной на рис. 1.23, *б*, это соотношение равно $4/3$.

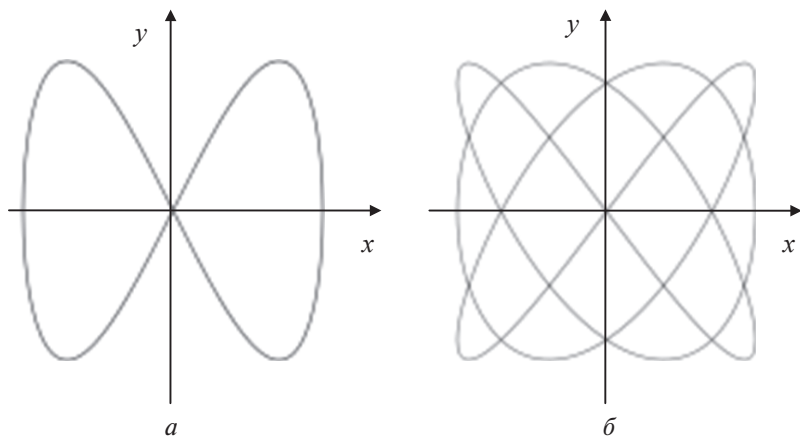


Рис. 1.23

1.9. КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ. НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если система обладает несколькими степенями свободы, то в ней возможны одновременно колебания по всем степеням свободы. Например, в предыдущем параграфе были рассмотрены колебания частицы относительно начала координат в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Обычный маятник может совершать независимые колебания в двух взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях. Поэтому он тоже имеет две степени свободы. Если колебания, соответствующие каждой из степеней свободы, независимы друг от друга и не могут обмениваться друг с другом энергией, то рассмотрение движения системы с несколькими степенями свободы является чисто кинематической задачей: зная закон движения по каждой степени свободы, нужно произвести кинематическое сложение этих движений. Но наличие связи различных степе-

ней свободы между собой придает колебательному движению системы новые физические закономерности.

Связанные системы — это системы со многими степенями свободы (по крайней мере — двумя), обеспечивающие возможность обмена энергией между ними. Например, два маятника, соединенных пружиной, которая и осуществляет эту связь. Кстати, такая система обладает уже четырьмя степенями свободы. Характер колебаний в связанных системах весьма сложный, но, оказывается, их можно представить как суперпозицию *нормальных колебаний (мод)*. Что это такое? Нормальные колебания — это колебания, при которых все частицы системы колеблются с одинаковой частотой. Эта частота называется *нормальной*. Число нормальных колебаний равно числу степеней свободы системы. Каждое из них имеет свою частоту, и совокупность этих нормальных частот образует *частотный спектр* системы. Нормальные моды никогда не обмениваются энергией, и поэтому полную энергию системы можно найти как сумму энергий этих нормальных колебаний. Таким образом, задача исследования связанных систем сводится к нахождению их нормальных колебаний (мод) и соответствующих нормальных частот.

Рассмотрим в качестве примера *продольные* колебания двух частиц одинаковой массы m , находящихся на горизонтальной поверхности и изображенных на рис. 1.24. Жесткость всех пружинок равна κ , их равновесная длина — a (см. рис. 1.24, *а*). Движение одномерное, поэтому система имеет всего две степени свободы — по одной на каждую частицу.

Пусть в некоторый момент первая частица оказалась смещенной вправо относительно положения своего равновесия на величину ξ_1 , а вторая — на величину ξ_2 (см. рис. 1.24, *б*). При этом деформация левой пружины равна ξ_1 , средней — $(\xi_1 - \xi_2)$, а правой — ξ_2 . Тогда на первую частицу будет действовать сила

$$F_{1x} = \kappa(\xi_2 - 2\xi_1),$$

а на вторую

$$F_{2x} = \kappa(\xi_1 - 2\xi_2).$$

Запишем уравнения движения для этих частиц:

$$m\ddot{\xi}_1 = \kappa(\xi_2 - 2\xi_1), \quad (1.53a)$$

$$m\ddot{\xi}_2 = \kappa(\xi_1 - 2\xi_2), \quad (1.53b)$$

и решим их с помощью подстановки $\xi_{1,2} = a_{1,2}e^{i\omega t}$:

$$(2\kappa - \omega^2 m)a_1 - \kappa a_2 = 0,$$

$$-\kappa a_1 + (2\kappa - \omega^2 m)a_2 = 0.$$

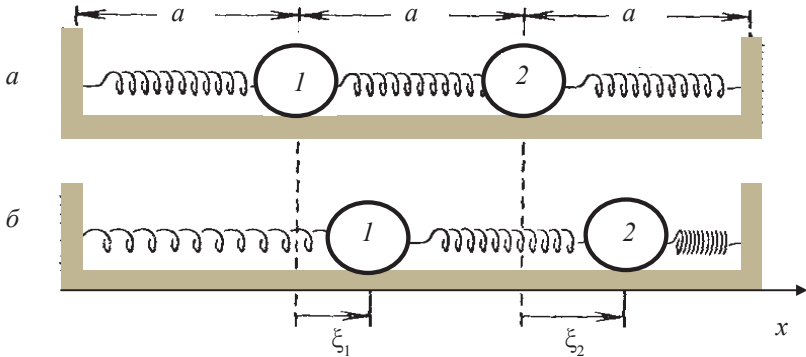


Рис. 1.24

Получили систему, состоящую из двух однородных уравнений, которая имеет решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (2\kappa - \omega^2 m) & -\kappa \\ -\kappa & (2\kappa - \omega^2 m) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (2\kappa - \omega^2 m)^2 - \kappa^2 &= 0, \\
 (\kappa - \omega^2 m)(3\kappa - \omega^2 m) &= 0, \\
 \omega_1 &= \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3\kappa}{m}}.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Из выражений (1.54) нашли частотный спектр нашей системы, который состоит из двух нормальных частот ω_1 и ω_2 .

Выясним, каким нормальным модам соответствуют эти частоты. Для этого сложим уравнения (1.53а) и (1.53б):

$$m(\ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2) = -\kappa(\xi_1 + \xi_2).$$

Введем новую переменную $\xi_C = (\xi_1 + \xi_2)/2$, которая характеризует смещение *центра масс* этой системы относительно положения равновесия. Тогда

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi}_C &= -\kappa\xi_C, \\
 \ddot{\xi}_C + \frac{\kappa}{m}\xi_C &= 0, \\
 \ddot{\xi}_C + \omega_1^2\xi_C &= 0.
 \end{aligned}$$

Получили дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания с нормальной частотой ω_1 . Итак, первая нормальная частота соответствует случаю, когда обе частицы колеблются в *одинаковой фазе* с равными амплитудами (см. рис. 1.25, а), и уравнение этих колебаний можно записать так:

$$\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \xi_C = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1). \tag{1.55а}$$

А теперь вычтем уравнение (1.53б) из (1.53а)

$$m(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2) = -3\kappa(\xi_1 - \xi_2)$$

и введем переменную $\tilde{\xi} = (\xi_1 - \xi_2) / 2$, которая совпадает с величиной деформации центральной пружины, деленной пополам. Она характеризует «внутреннее движение» — смещение частиц относительно их центра масс:

$$m\ddot{\tilde{\xi}} = -3\kappa\tilde{\xi},$$

$$\ddot{\tilde{\xi}} + \frac{3\kappa}{m}\tilde{\xi} = 0,$$

$$\ddot{\tilde{\xi}} + \omega_2^2\tilde{\xi} = 0.$$

Это уравнение описывает колебания с частотой ω_2 . Таким образом, вторая нормальная частота соответствует случаю, когда обе частицы колеблются в *противофазе* с равными амплитудами (рис. 1.25, б), и уравнение этих колебаний можно записать так:

$$\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) = \tilde{\xi} = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (1.55б)$$

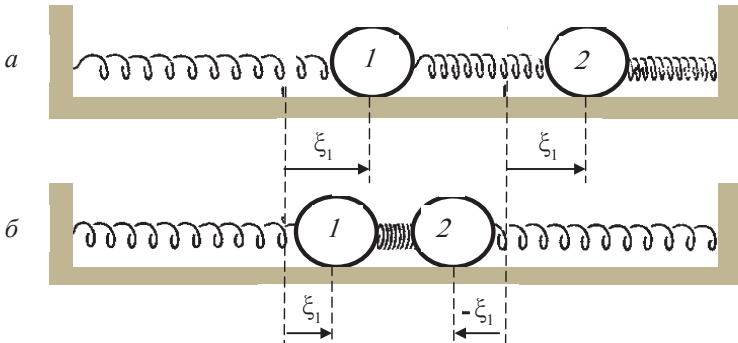


Рис. 1.25

Решая совместно уравнения (1.55а) и (1.55б), получаем уравнения, описывающие колебания этих связанных частиц:

$$\xi_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad (1.56a)$$

$$\xi_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (1.56b)$$

Получили важный результат — колебания частиц в связанной системе можно представить в виде суперпозиции нормальных мод, каждой из которых соответствует своя нормальная частота. Коэффициенты A , B , φ_1 , φ_2 определяются начальными условиями — когда и как мы раскатали систему.

Из формул (1.56) легко получить любые частные случаи. Например, если $B = 0$, то колебания соответствуют первой моде с частотой ω_1 и $\xi_1 = \xi_2$. Если же $A = 0$, то речь идет о второй моде, при которой $\xi_1 = -\xi_2$.

Рассмотрим *поперечные* колебания тех же самых частиц. Колебания происходят в горизонтальной плоскости. Пружинки имеют начальную длину (в нерастянутом состоянии) a_0 , которая меньше, чем длина a , соответствующая положению равновесия частиц (см. рис. 1.26, *а*). Когда система находится в состоянии равновесия, натяжение пружин равно T_0 . На рис. 1.26, *б* показано положение колеблющихся частиц в произвольный момент времени.

У системы вновь лишь две степени свободы, и аналогия с продольными колебаниями позволяет легко догадаться о ее модах. Мода с меньшей частотой ω_1 имеет форму, приведенную на рис. 1.26, *в*, а мода с частотой ω_2 изображена на рис. 1.26, *г*. Количественные расчеты этих нормальных частот, аналогичные сделанным для продольных колебаний, дают

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{T_0}{ma}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3T_0}{ma}}. \quad (1.57)$$

Как и в случае продольных колебаний, $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_1$. Для первой моды $\xi_1 = \xi_2$, для второй $\xi_2 = -\xi_1$.

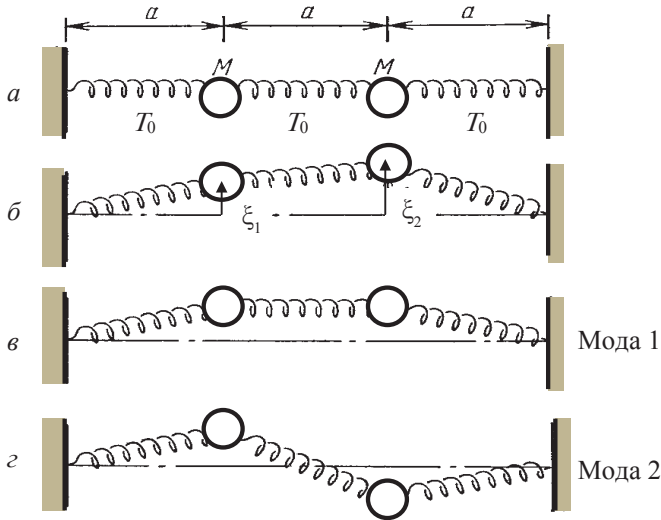


Рис. 1.26

В заключение обсудим *плоские* колебания этих частиц, сочетающие в себе и продольные, и поперечные колебания. В этом случае система имеет *четыре* степени свободы с соответствующими нормальными модами и их частотами. Все они нам уже известны — моды изображены на рис. 1.25 и 1.26, а нормальные частоты, образующие частотный спектр этой системы, определяются формулами (1.54) и (1.57).

Задача. Модель молекулы CO_2 — три шарика, соединенные одинаковыми легкими пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая система может совершать продольные колебания двух типов, как показано стрелками на рис. 1.27. Зная массы атомов, найти отношение частот этих колебаний.

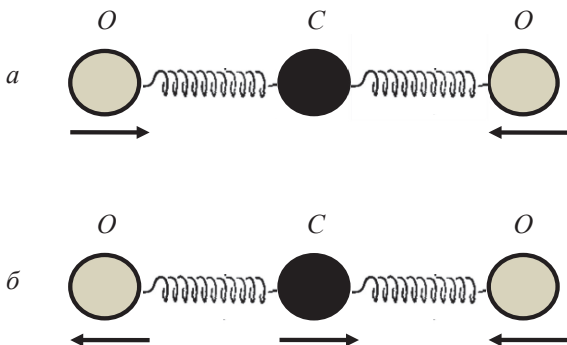


Рис. 1.27

Решение. В первом случае (рис. 1.27, *a*) задача решается легко. Атом углерода (шарик *C*) покоится, и его можно считать зафиксированным. Колебания атомов кислорода (шарики *O*) совершаются под действием силы упругости пружинок, и уравнение движения для любого из них может быть записано в виде

$$m_o \ddot{\xi} = -\kappa \xi,$$

где m_o — масса атома кислорода, ξ — его смещение относительно положения равновесия в некоторый момент. Дальше — все просто:

$$\ddot{\xi} + \frac{\kappa}{m} \xi = 0,$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \quad (1)$$

Для решения второй части задачи рассмотрим рис. 1.28, на котором изображены смещения атомов относительно положений равновесия в некоторый момент времени. Рассмотрим вначале центральный атом углерода. На него действуют две силы упругости — растянутой левой пружины и сжатой пра-

вой. Направление этих сил совпадает, и можно записать уравнение движения для шарика C :

$$m_C \ddot{\xi}_2 = -\kappa(\xi_1 + \xi_2) - \kappa(\xi_2 + \xi_3). \quad (2)$$

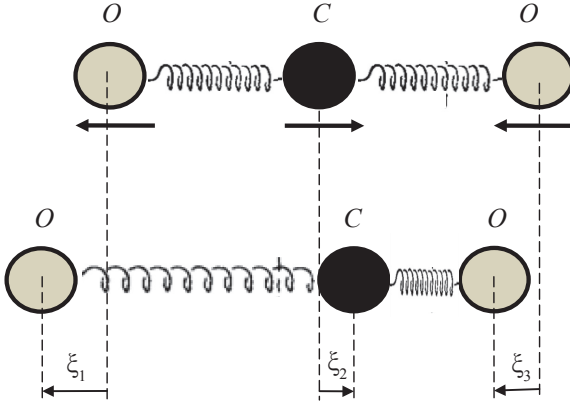


Рис. 1.28

На левый шарик O действует только сила упругости растянутой пружины, поэтому его уравнение движения запишем так:

$$m_O \ddot{\xi}_1 = -\kappa(\xi_1 + \xi_2). \quad (3)$$

На правый шарик действует сжатая пружина:

$$m_O \ddot{\xi}_3 = -\kappa(\xi_2 + \xi_3). \quad (4)$$

Получили систему из трех дифференциальных уравнений (2), (3) и (4), для решения которой используем подстановку $\xi_{1,2,3} = a_{1,2,3} e^{i\omega t}$ и придем к системе из трех однородных уравнений:

$$\begin{cases} (\kappa - m_O \omega^2) a_1 + \kappa a_2 = 0; \\ \kappa a_1 + (2\kappa - m_C \omega^2) a_2 + \kappa a_3 = 0; \\ \kappa a_2 + (\kappa - m_O \omega^2) a_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение в единственном случае — когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (\kappa - m_O \omega^2) & \kappa & 0 \\ \kappa & (2\kappa - m_C \omega^2) & \kappa \\ 0 & \kappa & (\kappa - m_O \omega^2) \end{vmatrix} = 0,$$

и после несложных вычислений получаем

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa(m_C + 2m_O)}{m_O m_C}}.$$

Нам осталось записать ответ:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} \approx 1,9.$$

ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА

Колебательным контуром называется цепь, содержащая емкость C и индуктивность L . Если активное сопротивление контура $R=0$, то контур называется *идеальным* (рис. 2.1). В нем отсутствуют тепловые потери.

Зарядим обкладки конденсатора и отключим его от источника. При этом вся энергия контура сосредоточена в конденсаторе и представляет собой энергию электрического поля,

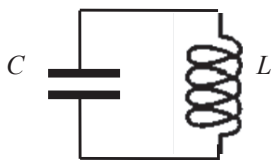


Рис. 2.1

существующего между его обкладками. Начнется разряд конденсатора через катушку индуктивности. При этом в катушке возникает индукционный ток (явление самоиндукции), который препятствует быстрому возрастанию тока в цепи, и поэтому когда заряд на обкладках конденса-

тора становится равным нулю, в катушке протекает максимальный ток. Энергия электрического поля конденсатора перешла в энергию магнитного поля катушки индуктивности. Если бы

катушка не обладала индуктивностью, ток бы исчез. Но убывающий ток вызывает появление индукционного тока, который теперь поддерживает убывающий ток в цепи (опять явление самоиндукции), и этот убывающий ток заряжает обкладки конденсатора. Итак, конденсатор перезарядился (знаки заряда на обкладках поменялись), и энергия магнитного поля вновь перешла в энергию поля электрического. Затем все повторяется.

Подведем итог. В контуре возможны колебания заряда на обкладках конденсатора и тока в цепи. Их называют *электромагнитными колебаниями* (ЭМК).

В процессе этих колебаний происходит периодическое превращение энергии электрического поля в магнитное и наоборот.

Найдем уравнение колебаний в *реальном* контуре, который наряду с емкостью и индуктивностью обладает активным сопротивлением R , и в который включена внешняя переменная ЭДС ε (рис. 2.2). Выберем положительное направление обхода контура, допустим, против часовой стрелки, и будем считать ток положительным, если он увеличивает заряд конденсатора.

Тогда ток в контуре определим как

$$I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \quad (2.1)$$

Следовательно, если $I > 0$, то и $dq > 0$, и наоборот. Согласно закону Ома для участка цепи

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s + \varepsilon,$$

где ε_s — ЭДС самоиндукции. В нашем случае

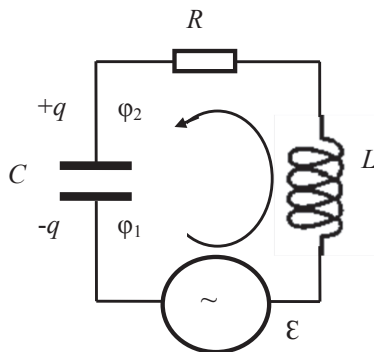


Рис. 2.2

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L\ddot{q}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C}$$

(знак q должен совпадать со знаком разности $\varphi_2 - \varphi_1$, т. к. $C > 0$).

Тогда

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon. \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (2.3)$$

и получим уравнение, хорошо знакомое нам по механическим колебаниям:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}. \quad (2.4)$$

Его называют *уравнением колебательного контура*. Величина ω_0 — *собственная частота* колебательного контура, а β — *коэффициент затухания*.

Если внешняя ЭДС отсутствует ($\varepsilon = 0$), то колебания называют свободными. При $R = 0$ колебания будут незатухающими (идеальный колебательный контур). Если $R \neq 0$, то получим свободные затухающие колебания в реальном контуре. Рассмотрим их по порядку.

2.2. СВОБОДНЫЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Если в контуре нет внешней ЭДС и активное сопротивление $R = 0$, то колебания в этом контуре будут свободными и незатухающими и уравнение, описывающее их, имеет вид

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Его решение мы знаем (см. выражение (1.6)):

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.5)$$

где q_m — амплитудное значение заряда на обкладках конденсатора, α — начальная фаза колебаний.

Закон, по которому изменяется напряжение на обкладках, имеет такой же вид (рис. 2.3):

$$U = \frac{q}{C} = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.6)$$

где $U_m = q_m / C$ — амплитудное значение напряжения.

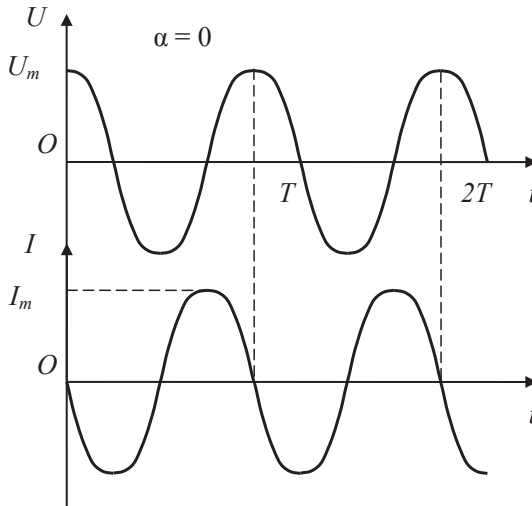


Рис. 2.3

Ток, протекающий в контуре, вычислим по формуле (2.1):

$$I = \dot{q} = -q_m \omega \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi/2), \quad (2.7)$$

где $I_m = q_m \omega$ — амплитудное значение тока в контуре. Таким образом ток по фазе опережает напряжение на $\pi/2$ (рис. 2.3). Ког-

да ток в контуре максимален, напряжение на обкладках равно нулю, и наоборот.

Энергия электрического поля зависит от времени по закону

$$W_E = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = W_{E \max} \cos^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.8)$$

где $W_{E \max} = CU_m^2 / 2$ — максимальное (амплитудное) значение энергии электрического поля.

Точно также найдем энергию магнитного поля:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = W_{M \max} \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.9)$$

где $W_{M \max} = LI_m^2 / 2$ — максимальное (амплитудное) значение энергии магнитного поля.

Мы уже отмечали, что в процессе колебаний происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного и наоборот. Теперь можно установить важные количественные соотношения. Ясно, что энергия W электромагнитных колебаний равна

$$W = W_E + W_M = W_{E \max} = W_{M \max}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{CU_m^2}{2} &= \frac{LI_m^2}{2}, \\ U_m &= \sqrt{\frac{L}{C}} I_m. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Задача 1. Ток в колебательном контуре зависит от времени как $I = I_m \sin \omega_0 t$, где $I_m = 9,0$ мА, $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. Емкость конденсатора $C = 0,50$ мкФ. Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент $t = 0$.

Решение. Для ответа на первый вопрос достаточно воспользоваться формулой (2.3):

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = 1,0 \text{ мГн.}$$

При $t = 0$ ток в контуре равен нулю. Сдвиг по фазе между током и напряжением составляет $\pi / 2$, поэтому напряжение на обкладках принимает максимальное значение, его легко найдем по формуле (2.11):

$$U(0) = U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C} = 0,40 \text{ В.}$$

Задача 2. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C , катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым сопротивлением, и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения U_m и затем в момент $t = 0$ замкнули ключ. Найти:

а) ток в контуре как функцию времени;

б) ЭДС самоиндукции в катушке в моменты, когда ее магнитная энергия равна электрической энергии конденсатора.

Решение. Из условия задачи следует, что напряжение на конденсаторе изменяется по закону косинуса, а это значит, что ток в контуре подчиняется закону синуса и описывается выражением:

$$I = I_m \sin \omega_0 t,$$

в котором $I_m = U_m \sqrt{C / L}$, $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся уравнением (2.2), которое в условиях нашей задачи ($R = 0$, $\varepsilon = 0$) принимает вид

$$0 = U + \varepsilon_s,$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — напряжение на конденсаторе.

Воспользуемся уравнением (2.10) и перепишем его:

$$W = W_{E \max} = W_E + W_M = 2W_E,$$

$$\frac{CU_m^2}{2} = CU^2,$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Ответ таков:

$$|\varepsilon_s| = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Задача 3. В контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией W . Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в η раз. Какую работу совершили при этом против электрических сил?

Решение. Работа пошла на увеличение энергии колебаний:

$$A = \Delta W = \frac{q_m^2}{2C_2} - \frac{q_m^2}{2C_1} = W \left(\frac{C_1}{C_2} - 1 \right).$$

Согласно формуле (2.3)

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \eta^2.$$

Поэтому

$$A = W(\eta^2 - 1).$$

Задача 4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C . Сопротивление катушки пренебрежимо мало. Катушка находится в постоянном магнитном поле, так что суммарный магнитный поток, пронизывающий все витки катушки, равен Φ . В момент $t = 0$ магнитное поле выключили. Считая время выключения очень ма-

лым по сравнению с периодом собственных колебаний контура, найти ток в контуре как функцию времени.

Решение. При выключении внешнего магнитного поля в катушке возникнет ЭДС индукции ε_i , а при появлении индукционного тока — и ЭДС самоиндукции ε_s , но конденсатор будет еще не заряжен: $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Тогда согласно закону Ома

$$IR = \varepsilon_i + \varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} - L\frac{dI}{dt}.$$

В нашем случае $R = 0$, и поэтому

$$d\Phi = -LdI.$$

Проинтегрируем это равенство:

$$\int_{\Phi}^0 d\Phi = -\int_0^{I_0} LdI, \\ \Phi = LI_0, \quad (1)$$

где I_0 — начальный ток (непосредственно после выключения поля).

После выключения внешнего поля ЭДС индукции обращается в нуль, но появляется разность потенциалов на обкладках конденсатора, поэтому закон Ома принимает вид

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_s.$$

Учитывая, что $R = 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 = U = q/C$, $\varepsilon_s = -L\dot{I}$, приходим к уравнению

$$0 = -\frac{q}{C} - L\dot{I}. \quad (2)$$

Продифференцируем его по времени и запишем так:

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC}I = 0.$$

Получили уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, и его решение имеет вид

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (3)$$

но в нем мы пока не знаем амплитудное значение тока I_m и начальную фазу α . Для того чтобы их найти, воспользуемся начальными условиями. В момент времени $t = 0$ заряд $q = 0$, и из уравнения (2) следует, что $\dot{I}(0) = 0$. Продифференцируем по времени выражение (3)

$$\dot{I} = -I_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

и для момента $t = 0$ получим

$$0 = -I_m \omega_0 \sin \alpha,$$

т. е. $\alpha = 0$.

Вновь воспользуемся уравнением (3), которое при $t = 0$ принимает вид $I_0 = I_m$. Учитывая, что $I_0 = \Phi / L$ (см. формулу (1)), получим ответ:

$$I = \frac{\Phi}{L} \cos \omega_0 t.$$

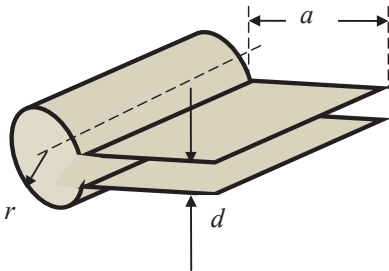


Рис. 2.4

Задача 5. Найти собственную частоту ω_0 резонатора (рис. 2.4), считая, что его плоская часть является конденсатором, а цилиндрическая — индуктивностью. Необходимые параметры указаны на рисунке.

Решение. Пусть длина резонатора (вдоль оси цилиндра) равна l . Тогда его емкость определится по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 l a}{d}.$$

Для того чтобы вычислить его индуктивность, вспомним про соленоид. Если по его обмотке протекает ток I , то создаваемое им магнитное поле локализовано внутри соленоида, оно является однородным и его индукция равна

$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Тогда nI — это ток, протекающий по боковой поверхности, соответствующей единице длины соленоида. В нашем случае по боковой поверхности цилиндрической части резонатора протекает некий ток I_Σ , и, значит, ток, протекающий по боковой поверхности, соответствующей единице длины цилиндра, будет равен I_Σ / l . Его и подставим в формулу (1):

$$B = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{l}.$$

Магнитный поток посчитать легко — ведь поле однородное и локализовано внутри цилиндра:

$$\Phi = B \pi r^2 = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{l} \pi r^2,$$

значит, можно найти индуктивность резонатора

$$L = \frac{\Phi}{I_\Sigma} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{l}$$

и тут же получить ответ:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{d}{\pi \varepsilon_0 \mu_0 a r^2}}.$$

2.3. СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В любом реальном контуре существует активное сопротивление и, как следствие этого, — тепловые потери. Поэтому свободные колебания в любом реальном контуре будут затухающими.

Уравнение затухающих колебаний получим, положив в выражении (2.4) $\varepsilon = 0$:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.12)$$

Решение этого уравнения известно (см. формулу (1.21)):

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.13)$$

Частота затухающих колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, коэффициент затухания $\beta = R / 2L$, амплитуда колебаний убывает со временем по закону

$$q_m(t) = q_0 e^{-\beta t}, \quad (2.14)$$

и график этих колебаний полностью совпадает с графиком механических затухающих колебаний (см. рис. 2.5).

Напряжение на обкладках конденсатора изменяется по такому же закону:

$$U = \frac{q}{C} = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (2.15)$$

Найдем зависимость тока в контуре от времени:

$$\begin{aligned} I = \dot{q} &= q_0 e^{-\beta t} (-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)) = \\ &= q_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t} \left(-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \alpha) \right) = \\ &= q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \left(-\frac{\beta}{\omega_0} \cos(\omega t + \alpha) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega t + \alpha) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= I_0 e^{-\beta t} (\cos \varphi \cos(\omega t + \alpha) - \sin \varphi \sin(\omega t + \alpha)) = \\
 &= I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \varphi).
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поясним проделанные вычисления. Мы умножили и разделили результат дифференцирования на $\sqrt{\omega^2 + \beta^2}$, который равен ω_0 . Коэффициенты, возникшие в скобках, меньше единицы, а сумма их квадратов равна единице. Это значит, что можно ввести некоторый угол φ , который удовлетворяет соотношениям:

$$\cos \varphi = -\frac{\beta}{\omega_0}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.17)$$

Обратим внимание на то, что $\cos \varphi < 0$, $\sin \varphi > 0$, то есть угол φ лежит во второй четверти. Ну, а дальше — формулы приведения. Итак, при затухающих колебаниях ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе на угол $\varphi > \pi/2$. Напомним, что в случае незатухающих колебаний этот угол был равен $\pi/2$.

Для характеристики затухающих электромагнитных колебаний вводят те же параметры, что и для механических колебаний (см. п. 1.4).

1. *Логарифмический декремент затухания* λ определяется как логарифм отношения амплитудных значений заряда $q_m(t)$ в моменты времени, отличающиеся на период колебаний:

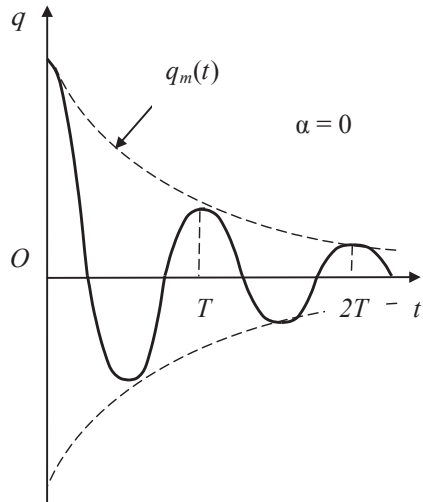


Рис. 2.5

$$\lambda = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.18)$$

В случае слабого затухания ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) это выражение можно упростить:

$$\lambda \approx \frac{2\pi\beta}{\omega_0} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

2. *Добротность* Q осциллятора связана с логарифмическим декрементом затухания соотношением

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.19)$$

Это важная величина, характеризующая свойства колебательной системы. Ранее уже отмечалось, что добротность, деленная на 2π , равна отношению энергии колебательного контура в данный момент к убыли этой энергии за один период колебания. Так, контуры, применяемые в электронных устройствах радиодиапазона, имеют добротность порядка нескольких сотен единиц, а полые резонаторы в диапазоне СВЧ — порядка нескольких сотен тысяч единиц.

3. *Время релаксации* τ — это время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = e, \quad \beta\tau = 1, \quad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}. \quad (2.20)$$

При наличии активного сопротивления энергия, запасенная в контуре, уменьшается, превращаясь в тепло, которое выделяется в окружающей среде. Мы знаем, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, которая в свою очередь зависит от времени по закону (1.23). Поэтому зависимость энергии затухающих колебаний от времени можно представить так:

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}, \quad (2.21)$$

где W_0 — энергия контура в начальный момент времени.

Задача 1. В контуре с емкостью C и индуктивностью L происходят свободные затухающие колебания, при которых ток в контуре меняется со временем по закону $I = I_m \beta^{-\beta t} \sin \omega t$. Найти напряжение на конденсаторе в зависимости от времени и в момент $t = 0$.

Решение. Ток опережает напряжение по фазе на угол φ (см. формулу (2.16)), поэтому зависимость напряжения на конденсаторе можно записать в виде

$$U = U_m \beta^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi).$$

Величину угла φ легко найдем из соотношений (2.17):

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega}{\beta},$$

а для того чтобы найти величину U_m , воспользуемся формулой (2.11):

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m.$$

Нам осталось записать ответ на первый вопрос задачи:

$$U = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m e^{-\beta t} \sin(\omega t - \varphi).$$

При $t = 0$ напряжение на конденсаторе будет равно

$$U(0) = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \sin \varphi = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \frac{\omega}{\omega_0} = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -I_m \sqrt{\frac{L}{C \left(1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}\right)}}.$$

Задача 2. Колебательный контур состоит из конденсатора $C = 4,0 \text{ мкФ}$ и катушки с индуктивностью $L = 2,0 \text{ мГн}$ и активным сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

Решение. Перепишем уравнение колебательного контура (2.2) в виде

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = 0.$$

В момент максимума тока $\dot{I} = 0$ и тогда $RI = -q/C$. Энергия магнитного поля катушки определяется по формуле $W_M = LI^2/2$, а энергия электрического поля конденсатора описывается выражением $W_E = q^2/2C$. Их отношение запишем так:

$$\frac{W_M}{W_E} = \frac{LCI^2}{q^2} = \frac{L}{CR^2} = 5.$$

Задача 3. Найти время τ , за которое амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью $Q = 5000$ уменьшится в $\eta = 2$ раза, если частота колебаний $\nu = 2,2 \text{ МГц}$.

Решение. Амплитуда колебаний тока убывает со временем по закону (см. формулу (2.16)) $I_m(t) = I_0 e^{-\beta t}$. Тогда

$$\frac{I_m(t)}{I_m(t+\tau)} = e^{\beta\tau} = \eta,$$

$$\tau = \frac{\ln \eta}{\beta}.$$

С другой стороны,

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\nu}{\beta},$$

т. е.

$$\beta = \frac{\pi\nu}{Q}.$$

Запишем ответ:

$$\tau = \frac{Q \ln \eta}{\pi\nu} = 0,5 \text{ с.}$$

Задача 4. Найти добротность контура с емкостью $C = 2,0 \text{ мкФ}$ и индуктивностью $L = 5,0 \text{ мГн}$, если на поддержание в нем незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 1,0 \text{ В}$ необходимо подводить мощность $P = 0,10 \text{ мВт}$. Затухание колебаний в контуре достаточно мало.

Решение. Воспользуемся формулой (2.21) и запишем ее дифференциал:

$$dW = -2\beta W_0 e^{-2\beta t} dt = -2\beta W dt. \quad (1)$$

В условии есть важная фраза о том, что затухание колебаний в контуре *достаточно мало*. Это значит, что можно воспользоваться следующим приемом: заменим dt на период колебаний T , а вместо dW запишем δW — убыль энергии за период колебания. Тогда $|\delta W| = PT$ и уравнение (1) принимает вид

$$-PT = -2\beta TW = -2\lambda W = -2W \frac{\pi}{Q}.$$

Таким образом,

$$Q = \frac{2\pi W}{PT}.$$

Учтем, что $W = CU_m^2 / 2$, $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, и получим ответ:

$$Q = \frac{U_m^2}{2P} \sqrt{\frac{C}{L}} = 100.$$

2.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вернемся к уравнению колебательного контура (2.4) и рассмотрим случай, когда в контур включена внешняя переменная ЭДС ε , зависящая от времени по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \cos \Omega t. \quad (2.22)$$

Тогда уравнение (2.4) принимает вид

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon_m}{L} \cos \Omega t. \quad (2.23)$$

Это уравнение вынужденных электромагнитных колебаний в контуре, которое по своему виду совпадает с аналогичным уравнением (1.31) для вынужденных механических колебаний. Это неоднородное дифференциальное уравнение, и его решение является суммой общего решения однородной его части и частного решения неоднородного уравнения (2.23). Решение однородной части мы знаем — оно описывает затухающие колебания, и при $t \gg \tau$ стремится к нулю (τ — время релаксации). Частное решение нам тоже известно (формула (1.32)). В нашем случае оно имеет вид

$$q = q_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (2.24)$$

где q_m — амплитуда колебаний заряда на конденсаторе, равная

$$q_m = \frac{\varepsilon_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (2.25)$$

ψ — разность фаз между колебаниями заряда и внешней ЭДС, определяемая формулой

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}. \quad (2.26)$$

Напряжение на обкладках конденсатора меняется со временем по такому же закону:

$$U = U_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (2.27)$$

где $U_m = q_m / C$ — амплитудное значение напряжения.

Резонансное значение частоты внешней ЭДС определяется из условия экстремума $dU_m / d\Omega = 0$ и совпадает с формулой (1.37):

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

График зависимости U_m от частоты Ω (резонансная кривая) приведен на рис. 2.6. Для заряда q_m резонансная кривая имеет тот же вид.

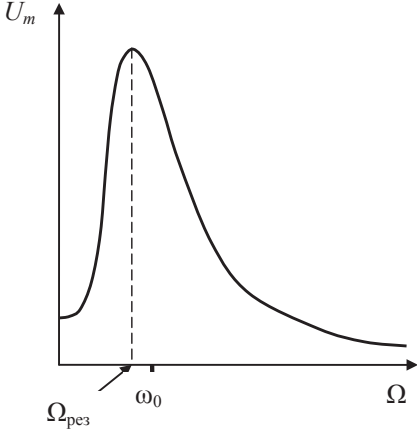


Рис. 2.6

Сила тока в контуре

$$\begin{aligned} I = \dot{q} &= -\Omega q_m \sin(\Omega t - \psi) = -I_m \sin(\Omega t - \psi) = \\ &= I_m \cos(\Omega t - \psi + \pi/2) = I_m \cos(\Omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\varphi = \psi - \pi/2$ — разность фаз между током и переменной ЭДС, I_m — амплитудное значение тока, равное

$$I_m = \frac{\Omega \varepsilon_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}}. \quad (2.29)$$

Зависимость амплитуды тока от частоты внешней ЭДС отличается от аналогичной зависимости амплитуды напряжения U_m и заряда q_m . При $\Omega \rightarrow 0$ I_m также стремится к нулю. Кро-

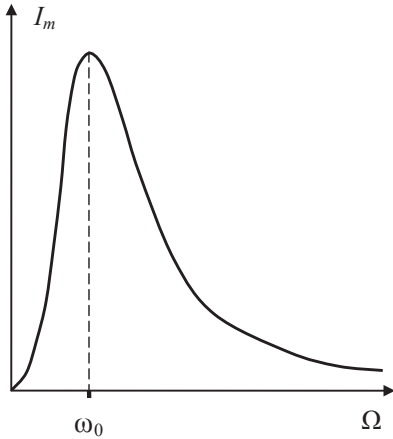


Рис. 2.7

ме того, резонансное значение частоты внешней ЭДС, определенное из условия экстремума $dI_m / d\Omega = 0$, дает значение

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0,$$

которое не зависит от коэффициента затухания β . График зависимости I_m от частоты Ω (резонансная кривая тока) приведен на рис. 2.7.

Вернемся к уравнению колебательного контура (2.4) и запишем его в виде

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon_m \cos \Omega t. \quad (2.30)$$

В левой части этого уравнения стоит сумма напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C , поэтому его можно представить в виде

$$U_L + U_R + U_C = \varepsilon_m \cos \Omega t, \quad (2.31)$$

где

$$U_R = RI = RI_m \cos(\Omega t - \varphi), \quad (2.32)$$

$$U_L = L\dot{I} = -\Omega LI_m \sin(\Omega t - \varphi) = \Omega LI_m \cos(\Omega t - \varphi + \pi/2), \quad (2.33)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{I_m}{\Omega C} \cos(\Omega t - \varphi - \pi/2). \quad (2.34)$$

Из трех последних формул видно, что U_R находится в фазе с током I , U_L опережает ток по фазе на $\pi/2$, а U_C — отстает на $\pi/2$.

Это можно наглядно представить с помощью *векторной диаграммы*, изобразив амплитуды напряжений:

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Lm} = \Omega LI_m,$$

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\Omega C},$$

и их векторную сумму, которая согласно выражению (2.31) равна вектору величины ε_m (см. рис. 2.8).

Из прямоугольного треугольника на этой диаграмме легко получить формулы для I_m и φ :

$$\begin{aligned} (RI_m)^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2 I_m^2 &= \varepsilon_m^2, \\ I_m &= \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L \right)^2 + R^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Выражение для I_m совпадает с выражением (2.29), а формула для φ согласуется с выражением (2.26) для разности фаз φ , поскольку

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \pi/2) = -\operatorname{ctg} \psi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi}.$$

Задача 1. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора $C = 22 \text{ мкФ}$ и катушки с активным сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 0,35 \text{ Гн}$, подключена к сети переменного напряжения с амплитудой $\varepsilon_m = 180 \text{ В}$ и частотой $\Omega = 314 \text{ с}^{-1}$. Найти:

а) амплитуду тока в цепи;

- б) разность фаз между током и внешним напряжением;
- в) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке.

Решение. Для ответа на первый вопрос воспользуемся формулой (2.29):

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2 + R^2}} = 4,5 \text{ A.}$$

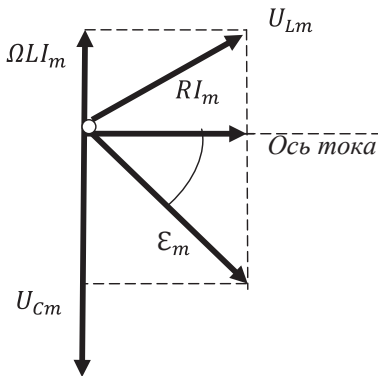


Рис. 2.9

Ответ на второй вопрос нам дает формула (2.35):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R} = -1,73,$$

то есть $\varphi = -60^\circ$. Это значит, что ток *опережает* внешнее напряжение и векторная диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 2.9.

Амплитуду напряжения на конденсаторе U_{Cm} найдем по формуле

$$U_{Cm} = \frac{I_m}{\Omega C} = 0,65 \text{ кВ.}$$

Катушка обладает не только индуктивностью, но и активным сопротивлением R , поэтому амплитуда напряжения U_{Lm} на ней определится выражением (см. диаграмму на рис. 2.9)

$$U_{Lm} = I_m \sqrt{(\Omega L)^2 + R^2} = 0,50 \text{ кВ.}$$

Задача 2. Цепь переменного тока, содержащая последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопро-

тивлением, подключена к внешнему переменному напряжению, частоту которого можно менять, не изменяя его амплитуды. При частотах Ω_1 и Ω_2 амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Найти резонансную частоту тока.

Решение. Максимуму резонансной кривой тока (см. рис. (2.7)) соответствует частота $\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$. Как видно из выражения (2.29), амплитуды силы тока будут одинаковыми при выполнении условия

$$\left| \Omega_1 L - \frac{1}{\Omega_1 C} \right| = \left| \Omega_2 L - \frac{1}{\Omega_2 C} \right|.$$

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} \left| \Omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega_1} \right| &= \left| \Omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\Omega_2} \right|, \\ \left| \frac{\Omega_1^2 - \omega_0^2}{\Omega_1} \right| &= \left| \frac{\Omega_2^2 - \omega_0^2}{\Omega_2} \right|. \end{aligned}$$

Пусть для определенности $\Omega_1 < \omega_0 < \Omega_2$. Тогда это равенство можно переписать, сняв модули

$$\frac{\omega_0^2 - \Omega_1^2}{\Omega_1} = \frac{\Omega_2^2 - \omega_0^2}{\Omega_2},$$

и после несложных преобразований получить ответ:

$$\Omega_{\text{рез}} = \omega_0 = \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}.$$

2.5. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Вынужденные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей емкость, индуктивность и активное сопротивление, переменного тока. Под действием внешнего напряжения

$$U = U_m \cos \omega t$$

ток в цепи изменяется по закону

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.36)$$

где

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}, \quad (2.37)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.38)$$

Выражение, полученное для амплитуды силы тока I_m , можно трактовать как закон Ома, и тогда выражение, стоящее в знаменателе, есть *полное сопротивление* цепи, или *импеданс*. Его обычно обозначают буквой Z :

$$Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}. \quad (2.39)$$

Выражение, стоящее в скобках, называют *реактивным сопротивлением* X :

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (2.40)$$

Величину ωL называют *индуктивным сопротивлением*, величину $1/\omega C$ — *емкостным*, и обозначают их так:

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad X = X_L - X_C, \quad Z = \sqrt{X^2 + R^2}. \quad (2.41)$$

Реактивное сопротивление обращается в нуль при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Следует сделать важное замечание. Реактивное сопротивление входит в формулу общего сопротивления совершенно равноправно с активным сопротивлением и имеет ту же размерность. Но между ними имеется принципиальное отличие. Оно заключается в том, что только активное сопротивление определяет тепловые потери в цепи.

Посчитаем мощность, выделяемую в цепи переменного тока:

$$\begin{aligned} P &= UI = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m (\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)). \end{aligned}$$

Практический интерес имеет среднее за период колебания значение мощности. Учитывая, что $\cos(2\omega t - \varphi) = 0$, получим

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi. \quad (2.42)$$

Это выражение можно привести к иному виду, если учесть, что из векторной диаграммы (2.8) следует, что $U_m \cos \varphi = RI_m$. Поэтому

$$P = \frac{RI_m^2}{2}. \quad (2.43)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I = I_m / \sqrt{2}$. Величины

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (2.44)$$

называют *действующими* значениями тока и напряжения. Все вольтметры и амперметры градуированы по действующим значениям напряжения и тока.

Среднюю мощность (2.42) можно представить в виде

$$P = UI \cos \varphi, \quad (2.45)$$

где множитель $\cos \varphi$ называют *коэффициентом мощности*. Получили интересный результат — выделяемая в цепи мощность зависит не только от величины напряжения и силы тока, но и от сдвига фаз между ними. К примеру, при $\varphi = \pi/2$ значение P равно нулю при любых значениях тока и напряжения. Это объясняется просто — в этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от генератора во внешнюю цепь, равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода. Вся энергия бесполезно «колеблется» между генератором и внешней цепью.

Зависимость мощности от $\cos \varphi$ приходится учитывать при проектировании линий электропередач на переменном токе — желательно, чтобы $\cos \varphi$ был по возможности близок к единице. Для этого надо, чтобы числитель в формуле (2.38) был минимален по модулю, что получается при равенстве емкостного и индуктивного сопротивлений ($X_C = X_L$).

Задача. Участок цепи, состоящий из последовательно соединенных конденсатора и активного сопротивления $R = 110$ Ом, подключили к внешнему переменному напряжению $U_m = 110$ В. При этом амплитуда тока оказалась равной $I_m = 0,50$ А. Найти разность фаз между током и внешним напряжением.

Решение. Под действием внешнего напряжения $U = U_m \cos \omega t$ ток в цепи изменяется по закону $I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, где φ определяется по формуле (2.38), которая в нашем случае принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega CR}.$$

Для того чтобы найти ωC , воспользуемся соотношением (2.38):

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}},$$

из которого получим

$$\omega C = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - R^2}}.$$

Нам осталось записать ответ

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{\left(\frac{U_m}{RI_m}\right)^2 - 1} = -1,73, \quad \varphi = -60^\circ.$$

В нашем случае $\varphi < 0$, а это значит, что ток опережает по фазе внешнее напряжение.

ГЛАВА 3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

3.1. УПРУГИЕ ВОЛНЫ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Если в некоторой области упругой среды возникают колебания (или иные возмущения), они начинают распространяться в пространстве. Этот процесс называется *упругой волной*. При этом происходит перенос энергии и импульса частиц среды, но сами частицы не перемещаются в пространстве — они колеблются относительно своих положений равновесия. В дальнейшем будем рассматривать среду как сплошную и непрерывную, а возмущения — малыми. В этом случае выполняется принцип суперпозиции, и любое возмущение можно представить в виде набора гармонических колебаний с различными частотами. Одно такое колебание, распространяющееся в пространстве, называют *монохроматической волной*. Вот такие волны и будем рассматривать.

Поперечными называются волны, в которых частицы среды колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. *Продольными* называются волны, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Типичный пример — звуковые волны. Продольные волны могут распространяться в любых упругих средах — в газах, жид-

костях и твердых телах, а для поперечных подходят только твердые среды, у которых модуль сдвига отличен от нуля. Мы сейчас говорим, конечно, о механических волнах. Поперечными, например, являются электромагнитные волны, а они, как известно, могут распространяться и в вакууме.

Волновой поверхностью называется геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе. Понятно, что таких поверхностей — множество. Они могут иметь различную форму, и, соответственно, волны могут быть плоские, сферические, цилиндрические и др.

Фронт волны называется поверхность, разделяющая возмущенную область пространства, в которой происходят колебания, от невозмущенной области, где колебания пока отсутствуют. По сути это одна из волновых поверхностей.

Скоростью распространения v волны называется скорость распространения данной фазы колебания, поэтому ее называют *фазовой скоростью*. С этой скоростью движется фронт волны.

Длиной волны λ называют расстояние, которое проходит волна за время, равное периоду T колебаний частиц среды:

$$\lambda = vT. \quad (3.1)$$

Таким образом, это расстояние между ближайшими частицами среды, колеблющимися с разностью фаз 2π .

Рассмотрим частицу среды, имеющую координаты (x, y, z) . Пусть в некоторый момент времени t частица смещена относительно своего положения равновесия. Величину этого смещения обозначим как ψ (это греческая буква *пси*). Задавая различные координаты и моменты времени, получим смещения любых частиц среды относительно положения равновесия. Поэтому функцию $\psi = \psi(x, y, z, t)$ называют *уравнением волны*. Оно должно удовлетворять как минимум двум условиям. Во-первых, оно должно быть периодичным по времени. Действительно,

это уравнение должно описывать колебания конкретной частицы с заданными координатами. Во-вторых, оно должно быть периодичным по координатам — частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии λ , колеблются одинаковым образом.

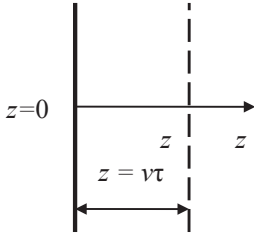


Рис. 3.1

Найдем уравнение *плоской волны* $\psi = \psi(z, t)$, распространяющейся вдоль оси z (рис. 3.1), предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Пусть колебания частиц в плоскости $z = 0$ имеют вид

$$\psi(0, t) = a \cos \omega t.$$

Для того чтобы пройти расстояние от плоскости $z = 0$ до плоскости с координатой z , волне требуется время $\tau = z / v$, и колебания в плоскости z будут происходить с отставанием на время τ :

$$\psi(z, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v} z \right) = a \cos(\omega t - kz). \quad (3.2)$$

Получили *уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси z* . В нем появилась новая величина

$$k = \omega / v, \quad (3.3)$$

которая называется *волновым числом*. Учитывая, что $\omega = 2\pi / T$, волновое число можно записать в виде

$$k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Если волна распространяется в противоположном направлении, то в уравнении (3.2) необходимо поменять знак у скорости:

$$\psi(z, t) = a \cos(\omega t + kz). \quad (3.5)$$

Уравнение (3.2) не содержит информации о начальных условиях — оно предполагает, что процесс колебаний начался задолго до того момента, как стали его наблюдать. Пусть колебания в плоскости $z=0$ *начались* в момент времени $t=0$. В этом случае уравнение волны удобно записать через синус:

$$\psi(z, t) = a \sin(\omega t + kz).$$

За время τ они распространятся на расстояние $z = v\tau$, и это будет координата фронта волны (рис. 3.2, *a*). В точках с координатами $z > v\tau$ колебания пока отсутствуют. На этом рисунке изображена «фотография» волны в момент времени τ . Она показывает смещения частиц среды относительно положений равновесия в этот момент времени. На рис. 3.2, *б* показано поведение частицы, находящейся на расстоянии z от источника. Ее колебания начнутся в момент времени $\tau = z/v$, когда волна дойдет до этой точки.

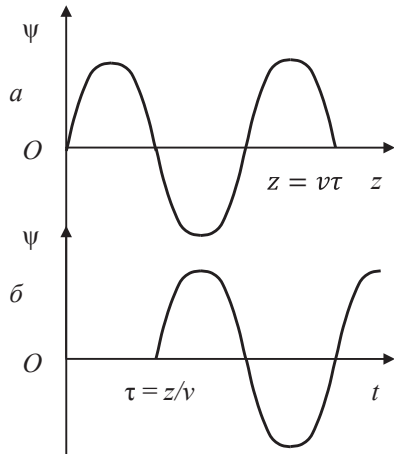


Рис. 3.2

Рассмотрим волновую поверхность, соответствующую определенной фазе колебаний

$$\omega t - \frac{\omega}{v} z = \text{const}$$

и возьмем дифференциал обеих частей этого равенства:

$$d\left(\omega t - \frac{\omega}{v} z\right) = 0,$$

$$dt - \frac{1}{v} dz = 0,$$

$$v = \frac{dz}{dt}.$$

Итак, данная фаза колебаний распространяется со скоростью v .

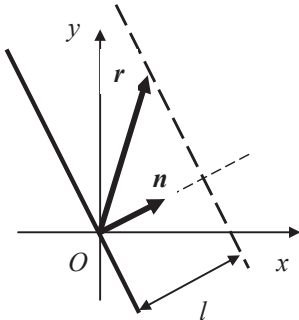


Рис. 3.3

Общим свойством волновых процессов (в случае малых возмущений) является *независимость* скорости распространения от величины амплитуды колебаний. Скорость определяется лишь свойствами среды, в которой распространяется волна. При этом, однако, скорость распространения волны зависит от частоты колебаний. Эта зависимость может носить сложный характер и лежит в основе совокупности явлений, носящих название *дисперсии* волн.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в *произвольном* направлении (рис. 3.3), и зададим его с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где α , β и γ — углы, образованные вектором \mathbf{n} с осями координат.

Пусть частицы, находящиеся на волновой поверхности, проходящей через начало координат, колеблются по закону

$$\psi(0, t) = a \cos \omega t.$$

Рассмотрим волновую поверхность, отстоящую от данной на расстоянии l . Время, за которое волна пройдет это расстояние, равно $\tau = l / v$, поэтому частицы, находящиеся на этой волновой поверхности, будут совершать колебания по закону

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos \omega(t - \tau) = a \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v} l \right).$$

Учтем, что $l = \mathbf{r}\mathbf{n}$, $k = \omega / v$, и тогда

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - k \mathbf{r}\mathbf{n}) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ называется *волновым вектором*. Он указывает направление распространения плоской волны, а по величине равен

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) носит название *уравнения плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении*. Это направление задается вектором \mathbf{k} , проекции которого на оси равны

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha, \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta, \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma \right). \quad (3.8)$$

В заключение обсудим один интересный вопрос. Мы ввели волновой вектор \mathbf{k} . А почему бы нам не ввести вектор длины волны $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$? Оказывается, такой вектор ввести нельзя. Чтобы разобраться с этим, вспомним физический смысл длины волны λ — это расстояние между двумя ближайшими частицами, которые колеблются с разностью фаз 2π . Изобразим две волновые поверхности, которым принадлежат эти частицы

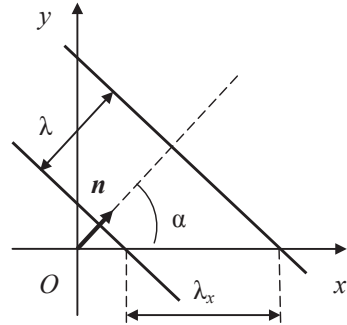


Рис. 3.3

(см. рис. 3.4), и зададимся вопросом: а что должна представлять собой проекция λ_x ? Очевидно, это расстояние между двумя частицами, которые колеблются с разностью фаз 2π , измеренное в направлении оси x (см. рис. 3.4). Легко сообразить, что $\lambda_x = \lambda / \cos \alpha$, т. е. $\lambda_x > \lambda$. Этого вполне достаточно.

Кстати, с вектором \mathbf{k} все в порядке: $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi / \lambda$.

Задача 1. Плоская волна с частотой ω распространяется со скоростью v в направлении, составляющем углы α , β и γ с осями x , y и z . Найти разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 .

Решение. Разность фаз колебаний двух точек определяется выражением

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_2) - (\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_1) = \mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \\ &= k_x(x_2 - x_1) + k_y(y_2 - y_1) + k_z(z_2 - z_1) = \\ &= \frac{\omega}{v}((x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_2 - y_1)\cos\beta + (z_2 - z_1)\cos\gamma).\end{aligned}$$

Задача 2. Найти волновой вектор \mathbf{k} и скорость v волны, имеющей вид $\psi = a \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)$.

Решение. Сравним это выражение с уравнением (3.6)

$$\psi = a \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z),$$

получим

$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

Найдем скорость из формулы (3.3):

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Задача 3. Уравнение плоской волны имеет вид $\psi = 60 \cos(1800t - 5,3z)$, где ψ — в мкм, t — в секундах, x — в метрах. Найти:

а) отношение амплитуды смещения a частиц среды к длине волны λ ;

б) амплитуду колебаний скорости u частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны v ;

в) амплитуду колебаний относительной деформации ε среды и ее связь с амплитудой колебаний скорости частиц среды.

Решение. Сравним уравнение (3.2) с приведенным в условии задачи:

$$a = 60 \text{ мкм}, \quad \omega = 1800 \text{ с}^{-1}, \quad k = 5,3 \text{ м}^{-1}.$$

$$\text{а) } \lambda = 2\pi / k = 1,18 \text{ м}, \quad a / \lambda = 50,8;$$

$$\text{б) } u = \partial \psi / \partial t = -a\omega \sin(1800t - 5,3z), \quad u_m = a\omega = 0,108 \text{ м/с}, \\ v = \omega / k = 340 \text{ м/с}, \quad u_m / v = 3,2 \cdot 10^{-4};$$

в) для ответа на третий вопрос нужно сделать небольшое пояснение: относительной деформацией среды называется величина $\varepsilon = \partial \psi / \partial z$:

$$\varepsilon = ak \cos(1800t - 5,3z), \quad \varepsilon_m = ak = 3,2 \cdot 10^{-4}, \\ \varepsilon_m / u_m = k / \omega = 1 / v = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ с/м}.$$

3.2. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим две плоских волны, распространяющихся в противоположных направлениях. Будем считать, что они имеют одинаковые частоты и равные амплитуды:

$$\psi_1 = a \cos(\omega t - kz),$$

$$\psi_2 = a \cos(\omega t + kz).$$

Согласно принципу суперпозиции при наложении волны не возмущают друг друга и колебания частиц среды оказываются векторной суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Поэтому результирующая волна будет описываться уравнением

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= \psi_1 + \psi_2 = a \cos(\omega t - kz) + a \cos(\omega t + kz) = \\ &= 2a \cos kz \cos \omega t.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Получили *уравнение стоячей волны*. Частицы среды колеблются с частотой ω и их амплитуда $A(z)$ зависит от координаты z :

$$A(z) = |2a \cos kz|. \quad (3.10)$$

В точках, где $|\cos kz| = 1$, амплитуда колебаний максимальна, и эти точки называются *пучностями* волны. Их координаты легко найти из равенства

$$kz_n = \pi n, \quad z_n = \frac{\pi}{k} n = \frac{\lambda}{2} n. \quad (3.11)$$

Точки, в которых $|\cos kz| = 0$, колебания отсутствуют, и эти точки называются *узлами* стоячей волны. Им соответствуют координаты

$$z_n = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.12)$$

Таким образом, расстояние между соседними пучностями или соседними узлами равно $\lambda / 2$.

Между соседними узлами все точки среды колеблются с одинаковой фазой, и при переходе через узел фаза изменяется на π . При этом через узлы не происходит никакой передачи энергии. Соответственно не происходит никакого переноса возмущения в направлении оси z . Потому волна и называется *стоячей*. В каком-то смысле она напоминает некий объемный осциллятор в пространстве. На рис. 3.5 изображены две «фотографии» стоячей волны. Одна (сплошная линия) соответствует моменту времени, когда $\cos \omega t = 1$, а вторая (пунктир) сделана через полпериода ($\cos \omega t = -1$).

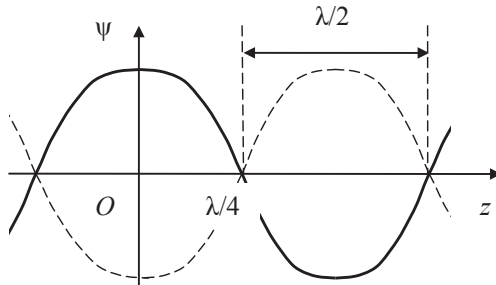


Рис. 3.5

Задача 1. Для определения скорости звука в воздухе использовали трубу с поршнем и звуковой мембраной M , закрывающей один из ее торцов (рис. 3.6). Найти скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, при которых наблюдается резонанс на частоте $\nu = 2,00$ кГц, составляет $l = 8,5$ см.

Решение. Граничные условия в данной задаче таковы: со стороны поршня должен быть узел стоячей волны, а со стороны мембраны — пучность. Таким образом, в промежутке между мембраной и поршнем должно укладываться целое число полувольт и еще четверть длины волны (рис. 3.6). Согласно условию

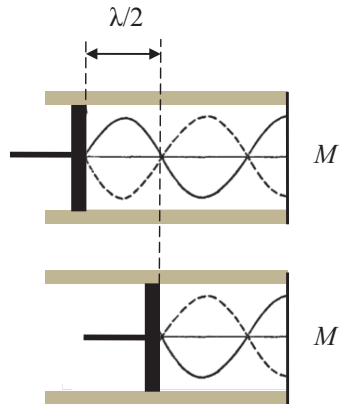


Рис. 3.6

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu},$$

$$\nu = 2\nu l = 340 \text{ м/с.}$$

Задача 2. В однородном стержне, площадь которого S и плотность ρ , установилась стоячая волна $\psi = a \sin kz \cos \omega t$. Найти полную механическую энергию, заключенную между сечениями, которые проходят через соседние узлы смещения.

Решение. Рассмотрим тонкий слой стержня толщиной dz , объемом $dV = Sdz$ и массой $dm = \rho dV$. Кинетическая энергия, запасенная в этом слое в момент времени t , определится выражением

$$dW_k = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho S a^2 \omega^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t dz,$$

и, соответственно, кинетическая энергия, заключенная между сечениями, которые проходят через соседние узлы смещения, будет равна

$$W_k = \frac{1}{2} \rho S a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^{\lambda/2} \sin^2 kz dz = \frac{1}{4k} \pi \rho S a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

При подстановке пределов интегрирования принимаем $\lambda = 2\pi / k$.

Прежде чем вычислить запасенную потенциальную энергию, сделаем несколько предварительных замечаний. Речь здесь идет об энергии, связанной с упругой деформацией стержня. Деформация может быть продольной (деформация сжатия и растяжения) и поперечной (деформация сдвига). В условии не говорится о типе деформации, поскольку это не повлияет на окончательный результат. Будем считать для определенности, что деформация продольная. В механике сплошных сред для этого случая получена формула, позволяющая рассчитать объемную плотность потенциальной энергии. Она имеет вид

$$w_p = \frac{E \varepsilon^2}{2}, \quad (3.13)$$

где E — модуль Юнга, характеризующий упругие свойства среды при деформации сжатия (растяжения) и связанный со скоростью v распространения продольной волны $v = \sqrt{E / \rho}$, ε — относительная деформация, определяемая как

$$\varepsilon = \frac{\partial \psi}{\partial z} = ak \cos kz \cos \omega t.$$

Тогда потенциальная энергия, запасенная в слое толщиной dz в момент времени t , определится выражением

$$dW_p = w_p dV = \frac{1}{2} E a^2 k^2 \cos^2 kz \cos^2 \omega t S dz.$$

Перед тем как проинтегрировать это выражение, учтем, что $E = \rho v^2 = \rho \omega^2 / k^2$, и тогда

$$W_p = \frac{1}{2} \rho S a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \int_0^{\lambda/2} \cos^2 kz dz = \frac{1}{4k} \pi \rho S a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

Ответ будет таким:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{4k} \pi \rho S a^2 \omega^2.$$

Кстати, если бы рассматривались поперечные колебания стержня, то вместо модуля Юнга был бы модуль сдвига G . Все формулы были бы те же.

3.3. КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

В натянутой струне, закрепленной с обоих концов, возбуждение стоячей волны возможно лишь при вполне определенных частотах. Это связано с выполнением *граничных условий*: концы струны должны быть *узлами*. Это значит, что на длине l струны должно укладываться *целое число полуволн*. Из этого условия следует, что

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Этим длинам волн соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n, \quad (3.15)$$

где v — фазовая скорость волн.

Частоты ν_n называют *собственными частотами* или *гармониками* струны. Частоту ν_1 , соответствующую $n=1$, называют *основной частотой*, или *тоном*. Частоты ν_2, ν_3, \dots называются *высшими гармониками*, или *обертонами*.

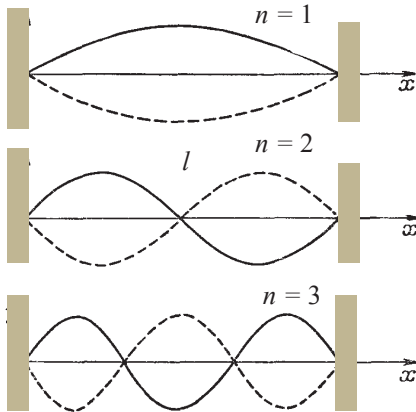


Рис. 3.7

На рис. 3.7 показаны три первых гармоники струны. Длина волны первой из них ($n=1$) равна $2l$, второй ($n=2$) l , а третьей ($n=3$) $2l/3$.

Колебания струны замечательны тем, что в рамках классической физики возникает дискретный спектр физической величины, в данном случае — частоты. Такая дискретность для классической физики является исключением, в отличие от квантовой физики.

Приведенные выше соображения относятся не только к струне, но и к стержням, закрепленным различным образом — в середине, на одном конце и т. д. Отличие заключается лишь в том, что *свободный конец стержня является пучностью*. Это относится как к поперечным, так и к продольным волнам.

В формулу (3.15) входит скорость волны в струне. Вычислим ее в предположении, что струна — однородная, ее натяжение в положении равновесия равно T_0 , и линейная плотность струны (масса единицы ее длины) равна ρ_0 . Будем считать, что колебания поперечные и происходят в направлении оси x .

Рассмотрим элемент струны, длина которого в равновесном положении равна Δz и его центр имеет координату z .

Выведем этот элемент из положения равновесия (рис. 3.8), при этом его среднее смещение будет равно $\psi(z, t)$. Этот элемент будет обладать некоторой кривизной, т. к. углы θ_1 и θ_2 не равны. При этом длина элемента будет больше Δz и сила натяжения — больше T_0 . Найдем поперечные составляющие сил натяжения, действующие на этот сегмент струны. На левом конце это будет сила $T_1 \sin \theta_1$, направленная вниз, а на правом — сила $T_2 \sin \theta_2$, направленная вверх. Результирующая сила F_x , действующая на этот сегмент, будет равна

$$F_x = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1. \quad (3.16)$$

Преобразуем это выражение к виду

$$F_x = T_2 \cos \theta_2 \operatorname{tg} \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 \operatorname{tg} \theta_1$$

и учтем, что $T_2 \cos \theta_2 = T_1 \cos \theta_1 = T_0$:

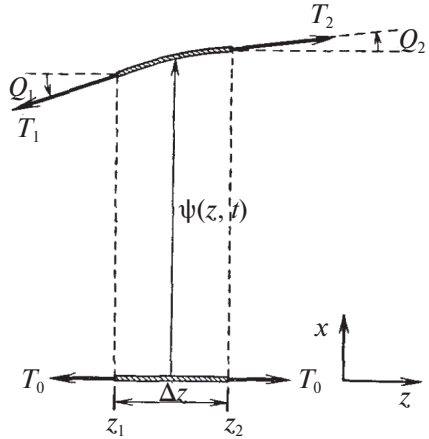


Рис. 3.8

$$F_x = T_0 \operatorname{tg} \theta_2 - T_0 \operatorname{tg} \theta_1 = T_0 \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z_2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z_1} \right). \quad (3.17)$$

Введем функцию

$$f(z) = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

и разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки z_1 , а затем положим $z = z_2$:

$$f(z_2) = f(z_1) + (z_2 - z_1) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{z_1} + \frac{1}{2} (z_2 - z_1)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_{z_1} + \dots$$

Считая $(z_2 - z_1) = \Delta z$ малой величиной, ограничимся в этом разложении первыми двумя членами

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

или

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z_2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z_1} = \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.18)$$

и уравнение (3.16) принимает вид

$$F_x = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (3.19)$$

По второму закону Ньютона

$$F_x = \Delta m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

и получим известное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.20)$$

которое называется *волновым уравнением*. Подставим в него производные по времени и координате от $\psi(z, t)$ из уравнения (3.9):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2a\omega^2 \cos kz \cos \omega t = -\omega^2 \psi, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2ak^2 \cos kz \cos \omega t = -k^2 \psi, \quad (3.22)$$

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\rho_0} k^2. \quad (3.23)$$

Вспомним, что $v = \omega / k$, и получим выражение для скорости волны в струне:

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \quad (3.24)$$

Задача 1. Стальная струна длиной $l = 110$ см и диаметром $d = 1,0$ мм натянута между полюсами электромагнита. При пропускании по струне переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц на ней установилось $\eta = 5$ полуволн. Найти силу натяжения струны.

Решение. Воспользуемся формулами (3.15) и (3.24)

$$v = \frac{\nu}{2l} \eta = \frac{\eta}{2l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

и выразим силу натяжения

$$T_0 = \rho_0 \left(\frac{2\nu l}{\eta} \right)^2.$$

Материал известен — сталь, его плотность ρ — величина табличная, так что линейную плотность ρ_0 найдем легко:

$$\rho_0 = \rho \frac{\pi d^2}{4}.$$

Ответ готов:

$$T_0 = \pi \rho \left(\frac{dv l}{\eta} \right)^2 = 3 \text{ Н.}$$

Задача 2. Медный стержень длиной $l = 50$ см закреплен в середине. Найти число его продольных собственных колебаний в диапазоне частот от 20 до 50 кГц. Каковы эти частоты?

Решение. Рассмотрим одну из половин стержня. Один его конец закреплен, там мы имеем узел, на втором — пучность. Как и в предыдущей задаче, в этом промежутке должно уложиться целое число полуволен и еще четверть длины волны:

$$\frac{l}{2} = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} (2n+1) = \frac{v}{4\nu} (2n+1),$$

$$\frac{2l\nu}{v} = 2n+1, \quad (1)$$

$$n = \frac{l\nu}{v} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{l\nu_1}{v} - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{l\nu_2}{v} - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Итак, получим неравенство, позволяющее найти возможные значения n и, таким образом, решить задачу. Для этого нужно найти скорость волны в стержне. Учитывая, что колебания продольные, сделаем это по известной формуле

$$\nu = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3)$$

где E и ρ — соответственно модуль Юнга и плотность меди. Это табличные значения: $E = 130$ ГПа, $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³. И, таким образом, скорость волны $\nu = 3,8 \cdot 10^3$ м/с. Тогда неравенство (2) принимает вид

$$2,13 \leq n \leq 6,08,$$

Видно, что n может принимать лишь четыре значения: $n = 3, 4, 5$ и 6 . Им соответствуют частоты

$$\nu_n = \frac{v}{2l}(2n+1) = 26,6; \quad 34,2; \quad 41,8; \quad 49,4 \text{ кГц.}$$

Задача 3. Струна массой m закреплена с обоих концов. В ней возбудили колебания основного тона с циклической частотой ω и максимальной амплитудой смещения a_m . Найти:

- а) максимальную кинетическую энергию струны;
- б) среднюю за период колебания кинетическую энергию струны.

Решение. Запишем уравнение стоячей волны в струне в виде

$$\psi = a \sin kz \cos \omega t.$$

В этом уравнении выбрали $\sin kz$ (а не $\cos kz$) исходя из граничных условий — на концах струны ($z = 0, z = l$) находятся узлы.

Выделим малый элемент струны длиной dz , находящийся на расстоянии z от левого конца струны. Он обладает кинетической энергией

$$dW_k = \frac{dm}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2,$$

где $dm = \rho_0 dz$ — масса этого элемента (ρ_0 — линейная плотность материала струны), $\partial \psi / \partial t$ — скорость этого элемента в момент времени t :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (a \sin kz \cos \omega t) = -a\omega \sin kz \sin \omega t.$$

В струне возбуждены колебания основного тона, а это значит, что длина струны l равна половине длины волны. Поэто-

му кинетическую энергию струны в момент времени t можно вычислить при помощи интеграла

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^{\lambda/2} \sin^2 k z dz = \\ &= \frac{1}{4} m a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Эта формула позволяет ответить на оба вопроса задачи. Максимальная кинетическая энергия струны равна

$$W_{k \max} = \frac{1}{4} m a^2 \omega^2,$$

а среднюю за период колебания кинетическую энергию струны найдем так:

$$W_k = \frac{1}{4} m a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{8} m a^2 \omega^2.$$

3.4. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Возьмем уравнение плоской волны (3.6) и запишем его в комплексной форме, как мы это делали в п. 1.6 (см., например, формулу (1.43)),

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.25)$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i a \omega e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -a \omega^2 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 \psi.$$

Учтем, что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$, найдем вторые производные от $\psi(\mathbf{r}, t)$ по координатам

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -ak_x^2 e^{i(\omega t - kr)}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -ak_y^2 e^{i(\omega t - kr)}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -ak_z^2 e^{i(\omega t - kr)}$$

и сложим их:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -ak^2 e^{i(\omega t - kr)} = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

Получили известное уравнение, которое называют *волновым уравнением*:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.26)$$

Обычно его записывают в более компактном виде

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.27)$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ — квадрат оператора ∇ .

Волновое уравнение обладает важной особенностью: *любое его решение* описывает тот или иной волновой процесс, и наоборот, любой волновой процесс описывается волновым уравнением (3.27).

В заключение рассмотрим часто встречающийся частный случай: плоская волна распространяется вдоль оси z :

$$k = (0, 0, k), \quad kr = kz, \quad \Psi = ae^{i(\omega t - kz)}, \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.29)$$

3.5. СКОРОСТЬ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Ранее отмечалось, что упругие волны могут распространяться в различных средах. Рассмотрим плоскую продольную волну, распространяющуюся в *твёрдой* среде в направлении оси z . Выделим

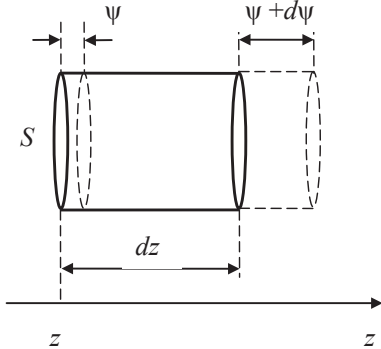


Рис. 3.9

в этой среде малый объем в виде цилиндра длиной dz с площадью основания S (рис. 3.9). При наличии колебаний этот цилиндр деформируется. Пусть в некоторый момент левый торец цилиндра сместился на величину ψ , а правый — на величину $\psi + d\psi$. Таким образом *удлинение* цилиндра равно $d\psi$. *Относительной деформацией* ε цилиндра называют величину

$$\varepsilon = \frac{d\psi}{dz}. \quad (3.30)$$

При малых продольных деформациях среды справедлив *закон Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.31)$$

где σ — *механическое напряжение*, Н/м^2 , численно равное нормальной составляющей силы, действующей на единицу поверхности, E — *модуль Юнга*, Па, характеризующий упругие свойства среды при продольной деформации.

Таким образом на выбранный цилиндр действует сила

$$dF_z = S(\sigma_2 - \sigma_1) = SE(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (3.32)$$

где индекс «1» соответствует левому торцу цилиндра, а индекс «2» — правому. Относительная деформация среды ε_1 соот-

ветствует координате $z + \psi$, и ее можно представить в виде разложения

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(z + \psi) = \varepsilon(z) + \frac{d\varepsilon}{dz} \psi = \varepsilon(z) + \frac{d^2\psi}{dz^2} \psi,$$

в котором ограничились лишь двумя первыми членами. Для ε_2 получим аналогично

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \varepsilon(z + dz + \psi + d\psi) = \varepsilon(z) + \frac{d\varepsilon}{dz} (dz + \psi + d\psi) = \\ &= \varepsilon(z) + \frac{d^2\psi}{dz^2} (dz + \psi + d\psi). \end{aligned}$$

Теперь можно переписать формулу (3.32) в виде

$$dF_z = SE \frac{d^2\psi}{dz^2} (dz + d\psi) \approx SE \frac{d^2\psi}{dz^2} dz, \quad (3.33)$$

поскольку при малых деформациях $d\psi \ll dz$.

По второму закону Ньютона

$$dF_z = dm \frac{d^2\psi}{dt^2} = \rho S dz \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

и тогда

$$SE \frac{d^2\psi}{dz^2} dz = \rho S dz \frac{d^2\psi}{dt^2}$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\rho}{E} \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0. \quad (3.34)$$

Получили *волновое уравнение*, описывающее процесс распространения продольной упругой волны в твердой среде, причем согласно уравнению (3.29) скорость $v_{\text{нп}}$ ее распространения равна

$$v_{\text{нп}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.35)$$

Аналогичные расчеты для поперечной волны приводят к результату

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (3.36)$$

где G — *модуль сдвига*, характеризующий упругие свойства среды при сдвиговой деформации.

Эти скорости не равны, и это используют, в частности, в сейсмологии. При различных землетрясениях в земной коре возбуждаются волны обоих типов. И когда сейсмографы регистрируют их появление, мы можем рассчитать расстояние до эпицентра по времени, разделяющем приход продольных (они более быстрые) и поперечных волн.

Именно по поведению волн, вызванных землетрясениями, было обнаружено, что поперечные волны не могут распространяться через центральную область — ядро Земли. Это означает, что центр Земли жидкий, хотя ничего более конкретного пока сказать нельзя. Изучение землетрясений — это единственный источник сведений о внутреннем строении Земли. В результате большого числа наблюдений на различных сейсмических станциях в период многих землетрясений получены важные сведения о скорости волн на разной глубине, их отражении на границах раздела различных сред, о рассеянии волн на неоднородностях земной коры, а также собственные гармоники Земли.

3.6. СКОРОСТЬ ЗВУКА В ГАЗАХ

Звуковая волна в газе представляет собой чередующуюся последовательность областей сжатия и разряжения газа, перемещающихся в пространстве. Поэтому в любой точке среды давление испытывает отклонения Δp от равновесного значения p ,

соответствующего отсутствию волн в этой области среды. Таким образом, *мгновенное значение* давления в некоторой точке среды можно представить в виде

$$p' = p + \Delta p. \quad (3.37)$$

Сформулируем условия так, как это сделали в предыдущем параграфе, — рассмотрим плоскую продольную волну, распространяющуюся вдоль оси z . Выделим в среде малый объем в виде цилиндра длиной Δz ($\Delta z \ll \lambda$) с площадью основания S (рис. 3.10) и проделаем те же операции, что и в предыдущем параграфе.

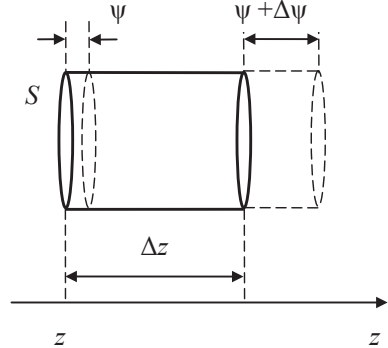


Рис. 3.10

Для начала запишем выражение для силы, действующей на этот цилиндр:

$$F_z = (p'_1 - p'_2)S,$$

где p'_1 — давление в сечении $(z + \psi)$, а p'_2 — в сечении $(z + \Delta z + \psi + \Delta\psi)$. Представим их в виде разложения, ограничившись лишь двумя членами:

$$p'_1 = p'(z + \psi) = p'(z) + \frac{\partial p'}{\partial z} \psi,$$

$$p'_2 = p'(z + \Delta z + \psi + \Delta\psi) = p'(z) + \frac{\partial p'}{\partial z} (\Delta z + \psi + \Delta\psi),$$

и тогда

$$F_z = -\frac{\partial p'}{\partial z} (\Delta z + \Delta\psi) S \approx -\frac{\partial p'}{\partial z} S \Delta z. \quad (3.38)$$

По второму закону Ньютона

$$\Delta m \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = F_z, \quad (3.39)$$

где $\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta z$ — масса газа в объеме цилиндра (ρ — плотность газа в отсутствие волн).

Объединим формулы (3.38) и (3.39) и получим

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (3.40)$$

В уравнении (3.40) содержатся две неизвестные функции: Ψ и p' . Выразим одну из них через другую. Для этого найдем связь между давлением газа p' и относительным изменением его объема $\partial \Psi / \partial z$. Эта связь зависит от особенностей сжатия (или разряжения) газа. В звуковой волне сжатия и разряжения следуют друг за другом так часто, что соседние области среды не успевают обмениваться теплом, и процесс можно считать *адиабатическим*. Воспользуемся *уравнением Пуассона*

$$p V^\gamma = \text{const},$$

где γ — показатель адиабаты, связанный с числом степеней свободы молекул газа, и запишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} p(S \Delta z)^\gamma &= p'(S(\Delta z + \Delta \Psi))^\gamma = p' \left(S \left(\Delta z + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Delta z \right) \right)^\gamma = \\ &= p'(S \Delta z)^\gamma \left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^\gamma. \end{aligned}$$

После сокращения получим

$$p = p' \left(1 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^\gamma.$$

В обычной звуковой волне относительные сжатия и разряжения среды очень малы, поэтому можно воспользоваться приближенной формулой, которую при $x \ll 1$ записывают так:

$$(1+x)^n \approx 1+nx. \quad (3.41)$$

В нашем случае $x = \partial\psi / \partial z$, $n = \gamma$ и тогда

$$p = p' \left(1 + \gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} \right).$$

Найдем p' :

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma \frac{\partial\psi}{\partial z}} \approx p \left(1 - \gamma \frac{\partial\psi}{\partial z} \right). \quad (3.42)$$

При получении последнего выражения снова воспользуемся формулой (3.41), взяв $n = -1$.

Продифференцируем равенство (3.42) по переменной z

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\gamma p \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

и получим, наконец, то выражение, которое стоит в правой части уравнения (3.40).

Итак, получено *волновое уравнение*, описывающее процесс распространения звуковой волны в газе:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \gamma p \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

которое обычно записывают в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.43)$$

Сравнивая его с уравнением (3.29), найдем *скорость распространения звуковых волн в газе*:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (3.44)$$

При атмосферном давлении и обычных температурах большинство газов можно считать идеальными. Используя уравнение Менделеева — Клапейрона, нетрудно показать, что

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M},$$

где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, M — молярная масса газа.

Тогда формулу (3.44) можно представить в виде, более удобном для обсуждения:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (3.45)$$

Из нее следуют два важных вывода. Во-первых, скорость звука *не зависит* от давления газа, а, во-вторых, скорость увеличивается с ростом его температуры пропорционально \sqrt{T} . Эта формула, в частности, позволяет легко вычислить скорость звука в воздухе при нормальных условиях: $v \approx 340$ м/с.

Одним из параметров, характеризующих идеальный газ, является *средняя скорость* теплового движения его молекул, величина которой определяется выражением

$$\langle v_{\text{мол}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (3.46)$$

Сопоставляя формулы (3.45) и (3.46), видим, что

$$v = \langle v_{\text{мол}} \rangle \sqrt{\frac{\gamma \pi}{8}}.$$

Для воздуха $\gamma = 1,4$, поэтому $v \approx 0,75 v_{\text{мол}}$. Для других газов также выполняется соотношение $v < v_{\text{мол}}$.

3.7. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Частицы среды, совершающие колебания, обладают кинетической и потенциальной энергией, поэтому область среды, в которой существуют колебания, приобретает дополнительный запас энергии, который называют *энергией упругой волны*.

Пусть в твердой среде в направлении оси z распространяется плоская продольная волна

$$\psi = a \cos(\omega t - kz).$$

Выделим в этой среде малый объем ΔV , линейные размеры которого много меньше длины волны. В этом случае все частицы, входящие в этот объем, будут иметь одинаковые смещения относительно своих положений равновесия и одинаковые скорости. Вычислим кинетическую энергию частиц в этом объеме

$$W_k = \frac{\Delta m}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz),$$

где ρ — плотность среды.

Потенциальная энергия определяется известной формулой

$$W_p = w_p \Delta V,$$

где w_p — объемная плотность потенциальной энергии (потенциальная энергия частиц в единице объема среды). В случае продольной деформации

$$w_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} E a^2 k^2 \sin^2(\omega t - kz). \quad (3.47)$$

Учитывая, что согласно выражению (3.35) $E = \rho v^2$, $k^2 = \omega^2 / v^2$, получим

$$W_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz).$$

Тогда механическая энергия W , запасенная в объеме ΔV , будет равна

$$W = W_k + W_p = \rho \Delta V a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz). \quad (3.48)$$

Введем *объемную плотность энергии* упругой волны

$$w = \frac{W}{\Delta V} = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kz). \quad (3.49)$$

Эта формула дает принципиальную возможность вычислить энергию волны в любом объеме V среды в произвольный момент времени

$$W = \int_{(V)} w dV. \quad (3.50)$$

Для этого, правда, нужно знать зависимость от координат плотности среды (если среда неоднородна) и амплитуды.

У формулы (3.49) есть один практический недостаток — это осциллирующая функция времени. Вычислим *среднее* значение величины w :

$$\langle w \rangle = \rho a^2 \omega^2 \left\langle \sin^2(\omega t - kz) \right\rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2. \quad (3.51)$$

Тогда

$$\langle W \rangle = \int_{(V)} \langle w \rangle dV, \quad (3.52)$$

и для плоской волны

$$\langle W \rangle = \langle w \rangle V. \quad (3.53)$$

3.8. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ УПРУГОЙ ВОЛНОЙ

Область среды, в которой распространяется упругая волна, обладает дополнительным запасом энергии. Откуда же взялась эта энергия? Она доставляется от источника колебаний самой волной. Это значит, что *волна переносит энергию*. Для характеристики этого процесса введем несколько физических величин.

Потоком энергии Φ через некоторую поверхность называется физическая величина, равная энергии, переносимой волной через эту поверхность в единицу времени. Если за время dt через эту поверхность была перенесена энергия dW , то

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (3.54)$$

Размерность потока энергии $[\Phi] = \text{Дж/с} = \text{Вт}$.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z , и расположим на ее пути поперечную площадку S_{\perp} (рис. 3.11). Если v — скорость волны, то за время dt через эту площадку будет перенесена энергия, запасенная в объеме цилиндра $dV = S_{\perp} v dt$.

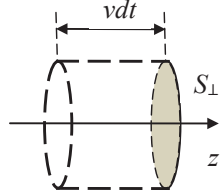


Рис. 3.11

Пусть объемная плотность энергии среды w , тогда поток энергии, переносимой волной через поверхность S_{\perp} , будет равен

$$\Phi = \frac{w dV}{dt} = wv S_{\perp}. \quad (3.55)$$

Введем *плотность потока энергии* j как поток через *единичную* поперечную площадку:

$$j = \frac{\Phi}{S_{\perp}} = wv. \quad (3.56)$$

Его размерность $[j] = \text{Вт} / \text{м}^2$.

Перенос энергии осуществляется в направлении распространения волны, поэтому вводят вектор плотности потока энергии, который называют *вектором Умова*:

$$\mathbf{j} = w\mathbf{v}. \quad (3.57)$$

Он указывает направление переноса энергии и равен энергии, переносимой волной в единицу времени через единичную поперечную площадку.

При плоской волне и поперечной площадке все просто: если известен вектор \mathbf{j} , то легко найдем поток энергии через площадь S_{\perp} :

$$\Phi = jS_{\perp}.$$

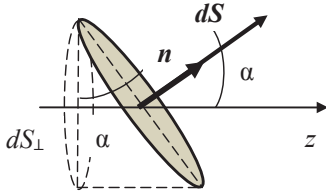


Рис. 3.12

А как быть, если поверхность имеет произвольную форму? Поступим так. Рассмотрим малую площадку dS , вектор нормали \mathbf{n} к которой образует угол α с вектором \mathbf{j} (рис. 3.12). Поток энергии $d\Phi$ через эту площадку будет точно таким же, как и через площадку dS_{\perp} , поэтому

$$d\Phi = jdS_{\perp} = jdS \cos \alpha = j dS. \quad (3.58)$$

Любую поверхность S можно разбить на множество таких площадок, и тогда поток энергии запишется в виде интеграла

$$\Phi = \int_{(S)} j dS. \quad (3.59)$$

Итак, поток энергии через некоторую поверхность выражается через вектор Умова, который согласно формуле (3.56) зависит от объемной плотности w энергии волны. В свою очередь, как следует из выражения (3.49), плотность энергии является периодической функцией времени, все это приводит к замет-

ному усложнению решения практических задач. Поэтому часто вместо вектора Умова используют *интенсивность I волны*, которая представляет собой *среднее значение модуля* вектора Умова:

$$I = |\mathbf{j}| = wv = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v. \quad (3.60)$$

Это выражение справедливо для упругих волн любого вида — плоских, сферических, цилиндрических и т. д. Вместе с тем следует помнить, что речь идет только о *бегущих* волнах, распространяющихся в пространстве. В стоячих волнах перенос энергии отсутствует.

3.9. УРАВНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Упругая волна называется *сферической*, если ее волновые поверхности имеют вид концентрических сфер, в центре которых расположен *изотропный* источник колебаний, излучающий одинаково по всем направлениям.

Рассмотрим одну из таких волновых поверхностей, имеющую радиус r (рис. 3.13), и посчитаем переносимый через нее поток энергии:

$$\Phi = \oint_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} = \oint_{(S)} j dS \cos \theta = \oint_{(S)} j dS = j 4\pi r^2.$$

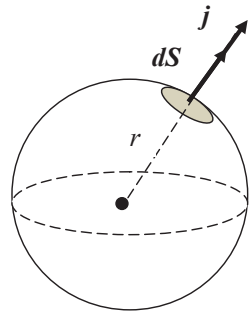


Рис. 3.13

Здесь учтено, что для изотропного источника плотность потока энергии будет одинакова во всех точках волновой поверхности. Перейдем к средним значениям и воспользуемся формулой (3.60):

$$\Phi = I \cdot 4\pi r^2 \sim a^2 r^2.$$

Получили среднее значение энергии, переносимой волной через эту поверхность в единицу времени. Чем определяется эта энергия? Ответ очевиден: она определяется *средней мощностью* P излучения источника, т. е.

$$\Phi = P = \text{const.}$$

Поэтому

$$a^2 r^2 = \text{const}, \quad a \sim \frac{1}{r},$$

и тогда

$$a = \frac{a_0}{r}, \quad (3.61)$$

где a_0 — амплитуда колебаний на расстоянии $r = 1$ м от источника.

Получили формулу для амплитуды колебаний в *сферической волне*, теперь можем записать *уравнение сферической волны*:

$$\psi(r, t) = \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (3.62)$$

Обратим внимание на то, что в этом уравнении отсутствуют знаки векторов. Это вызвано тем, что все точки, находящиеся на одном расстоянии r от источника, колеблются одинаковым образом, а вектора \mathbf{r} и \mathbf{k} сонаправлены и поэтому скалярное произведение $\mathbf{k}\mathbf{r} = kr$.

Интенсивность сферической волны также убывает с расстоянием. Поскольку $I \sim a^2$, то

$$I = \frac{I_0}{r^2}, \quad (3.63)$$

где I_0 — интенсивность волны на расстоянии 1 м от источника.

Задача. Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости круга, проходящем через его

центр O . Расстояние между точкой O и источником $l = 1,00$ м, радиус круга $R = 0,50$ м. Найти средний поток энергии через площадь круга, если в точке O интенсивность звука $I_0 = 30$ мкВт/м².

Решение. Разобьем площадь круга на тонкие кольца и рассмотрим одно из них, имеющее радиус r и толщину dr (рис. 3.14). Вектор \mathbf{j} образует угол α с нормалью к плоскости круга, и поток энергии $d\Phi$ через площадь этого кольцевого слоя (он выделен на рис. 3.14) будет равен

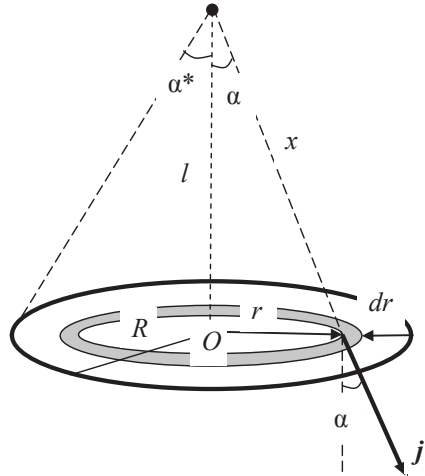


Рис. 3.14

$$d\Phi = j dS \cos \alpha = j 2\pi r dr \cos \alpha.$$

Перейдем к средним значениям:

$$d\Phi = I \cdot 2\pi r dr \cos \alpha.$$

Волна сферическая, ее интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Поэтому интенсивность I в пределах выделенного кольца можно выразить через I_0

$$I = I_0 \frac{l^2}{x^2},$$

и тогда

$$d\Phi = I_0 \frac{l^2}{x^2} 2\pi r dr \cos \alpha.$$

Учтем, что

$$x = l / \cos \alpha, \quad r = l \operatorname{tg} \alpha, \quad dr = l d\alpha / \cos^2 \alpha,$$

и придем к простой формуле

$$d\Phi = 2\pi I_0 \sin \alpha d\alpha,$$

проинтегрировав которую, получим ответ

$$\Phi = 2\pi l^2 I_0 \int_0^{\alpha^*} \sin \alpha d\alpha = 2\pi l^2 I_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}} \right).$$

В этом выражении появился угол α^* (см. рис. (3.14)), косинус которого равен

$$\cos \alpha^* = \frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/l)^2}}.$$

3.10. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В РЕАЛЬНЫХ СРЕДАХ

Процесс распространения упругих волн в реальной среде отличается от описанного выше. Любое решение волнового уравнения (3.27) описывает волну, существующую бесконечно долго (см., например выражение (3.25)), при этом любая частица среды совершает незатухающие колебания. В реальной среде происходит *затухание* упругих волн, которое обусловлено взаимодействием упорядоченных колебаний с неупорядоченным тепловым движением частиц среды. Это взаимодействие разрушает колебания, переводя энергию упорядоченного движения в тепло. Расчеты показывают, что эти процессы приводят к экспоненциальному убыванию интенсивности колебаний с расстоянием. Так, в случае плоской волны

$$I(z) = I_0 e^{-2\gamma z}, \quad a(z) = a_0 e^{-\gamma z}, \quad (3.64)$$

где I_0 и a_0 — интенсивность и амплитуда колебаний вблизи источника, γ — коэффициент затухания.

Для сферической волны эти уравнения принимают вид

$$I(r) = \frac{I_0}{r^2} e^{-2\gamma r}, \quad a(r) = \frac{a_0}{r} e^{-\gamma r}. \quad (3.65)$$

Коэффициент затухания определяется не только свойствами среды, но и зависит от частоты волны ν : $\gamma \sim \nu^2$. Это означает, что с возрастанием частоты затухание резко увеличивается. Так, инфразвуковые волны, возникающие при землетрясениях, свободно проходят через земной шар. А упругие волны с частотой 10^6 Гц затухают уже на расстоянии порядка 50 м. Особенно сильно затухание на очень высоких частотах. Именно это препятствие является основной трудностью на пути получения гравитационных колебаний.

Задача 1. В однородной среде распространяется плоская волна вида $\psi = ae^{-\gamma z} \cos(\omega t - kz)$. Найти разность фаз колебаний в точках, где амплитуды смещения частиц среды отличаются друг от друга на $\eta = 1\%$, если $\gamma = 0,42 \text{ м}^{-1}$, длина волны $\lambda = 50 \text{ см}$.

Решение. Амплитуды колебаний в указанных точках можно записать в виде $a_1 = ae^{-\gamma z_1}$, $a_2 = ae^{-\gamma z_2}$, и тогда

$$\eta = \frac{a_1 - a_2}{a_1} = 1 - \frac{a_2}{a_1} = 1 - e^{-\gamma(z_2 - z_1)},$$

$$z_2 - z_1 = -\frac{1}{\gamma} \ln |1 - \eta|.$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках найдем из соотношения

$$\frac{z_2 - z_1}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi},$$

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\gamma\lambda} \ln |1 - \eta| = 0,3 \text{ рад}.$$

Задача 2. Найти коэффициент затухания γ звуковой волны, если на расстояниях $r_1 = 10$ м и $r_2 = 20$ м от точечного изотропного источника звука значения интенсивности звуковой волны отличаются друг от друга в $\eta = 4,5$ раза.

Решение. Согласно формуле (3.65)

$$I(r_1) = \frac{I_0}{r_1^2} e^{-2\gamma r_1}, \quad I(r_2) = \frac{I_0}{r_2^2} e^{-2\gamma r_2},$$

и тогда

$$\eta = \frac{I(r_1)}{I(r_2)} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 e^{2\gamma(r_2 - r_1)}.$$

Прологарифмировав это выражение, получим ответ:

$$\gamma = \frac{\ln \left| \eta \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right|}{2(r_2 - r_1)} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

3.11. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Опыт показывает, что *частота* упругой волны не является ее инвариантной характеристикой. Она изменяется при переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой. Это явление называется *эффектом Доплера*.

Скорость распространения волны в среде зависит только от упругих свойств среды и не зависит от скорости движения источника колебаний. Свяжем с этой средой лабораторную систему отсчета K и рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x :

$$\psi(x, t) = a \cos(\omega t - kx). \quad (3.66)$$

В системе отсчета K' , движущейся относительно системы K со скоростью V_x в направлении оси x , уравнение этой волны примет вид

$$\psi(x', x') = a \cos(\omega' t' - k' x'). \quad (3.67)$$

Амплитуда колебаний не изменится — из преобразований Галилея следует, что расстояние между двумя точками (в нашем случае между положением равновесия частицы и ее максимальным смещением) не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую. Применим эти преобразования ($t' = t$, $x' = x - V_x t$) к аргументу косинуса в выражении (3.67)

$$\omega t' - k' x' = \omega t - k' (x - V_x t) = (\omega + k' V_x) t - k' x$$

и сравним его с аргументом косинуса в формуле (3.66):

$$\omega' + k' V_x = \omega, \quad (3.68)$$

$$k' = k. \quad (3.69)$$

Равенство (3.69) вполне понятно: $k' = 2\pi / \lambda$, $k = 2\pi / \lambda$, а длина волны одинакова в системах K и K' — о неизменности расстояний говорилось ранее.

Преобразуем равенство (3.68) с учетом выражения (3.69), получим

$$\omega = \omega - k V_x = \omega \left(1 - \frac{V_x}{v} \right),$$

запишем его через частоту ν

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{V_x}{v} \right) \quad (3.70)$$

и рассмотрим несколько конкретных ситуаций.

1. Источник колебаний покоится, а приемник движется вдоль оси x . В этом случае $\nu_{\text{ист}} = \nu$, $\nu_{\text{пр}} = \nu$, и формула (3.70) принимает вид

$$v_{\text{пр}} = v_{\text{ист}} \left(1 - \frac{V_x}{v} \right). \quad (3.71)$$

Если приемник удаляется ($V_x > 0$), то $v_{\text{пр}} < v_{\text{ист}}$ и приемник регистрирует частоту, меньшую частоты источника колебаний. Если приемник приближается ($V_x < 0$), то $v_{\text{пр}} > v_{\text{ист}}$.

2. Приемник покоится, а источник колебаний — движется. В этом случае $v_{\text{ист}} = v'$, $v_{\text{пр}} = v$ и формула (3.70) принимает вид

$$v_{\text{пр}} = \frac{v_{\text{ист}}}{1 - \frac{V_x}{v}}. \quad (3.72)$$

Источник испускает волну в направлении оси x , значит, приемник находится справа от него; если источник приближается к приемнику, то $V_x > 0$ и приемник регистрирует частоту $v_{\text{пр}} > v_{\text{ист}}$. Если источник удаляется ($V_x < 0$), то $v_{\text{пр}} < v_{\text{ист}}$.

3. Нетрудно получить и общую формулу, когда находятся в движении и источник колебаний, и приемник:

$$v_{\text{пр}} = v_{\text{ист}} \frac{1 - \frac{V_{\text{пр}}}{v}}{1 - \frac{V_{\text{ист}}}{v}}. \quad (3.73)$$

Возможен более сложный случай, когда источник и приемник движутся не по одной прямой. В этом случае необходимо учитывать *эффект запаздывания*. Он связан с конечной скоростью передачи сигнала, определяемой свойствами среды. Сигнал, частоту которого воспринимает приемник в момент времени t , был испущен источником в момент $t - \tau$, где τ — время, необходимое для прохождения волной расстояния l от точки, где находился источник в момент времени $t - \tau$, до точки, где находится приемник в момент времени t , т.е. $\tau = l/v$. Эту ситуацию рассмотрим в задаче 5 в конце параграфа.

Аналогичный эффект наблюдается и в том случае, когда источник (или приемник) движется с ускорением.

Вместе с тем, эффектом запаздывания можно пренебречь, если скорости источника и приемника значительно меньше скорости звука (и при разумных расстояниях между ними, конечно).

Задача 1. На оси x находятся приемник и источник колебаний с частотой $\nu = 2000$ Гц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с циклической частотой $\omega = 34 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $a = 50$ см. Какова ширина частотного интервала $\Delta\nu$, воспринимаемого неподвижным приемником? Скорость звука $v = 340$ м/с.

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний, которые совершает источник,

$$\xi = a \cos \omega t,$$

и найдем его скорость:

$$v_x = \dot{\xi} = -a\omega \sin \omega t.$$

Максимальное значение скорости $v_m = a\omega = 17$ м/с, что много меньше скорости звука, поэтому эффект запаздывания можно не учитывать (впрочем, даже его возможное наличие не повлияло бы на конечный результат этой задачи). В данном случае движется источник, поэтому воспользуемся формулой (3.72). Максимальная частота ν_1 будет регистрироваться приемником тогда, когда источник приближается к нему с максимальной скоростью v_m , а минимальная ν_2 — когда он будет с той же скоростью удаляться от источника, поэтому результат можно записать в виде

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_m}{v}} - \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_m}{v}} = \nu_0 \frac{2 \frac{v_m}{v}}{1 - \left(\frac{v_m}{v}\right)^2} = 200 \text{ Гц}.$$

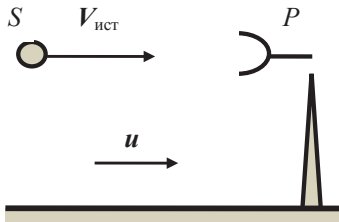


Рис. 3.15

Задача 2. Источник S , испускающий волну с частотой $\nu_{\text{ист}}$, движется с постоянной скоростью $V_{\text{ист}}$ относительно приемника P , установленного на башне (рис. 3.15). При этом воздушная масса перемещается относительно земной поверхности с постоянной скоростью u (ветер). Скорость звука в воздухе v . Найти частоту $\nu_{\text{пр}}$,

регистрируемую приемником.

Решение. В формулу (3.73) входят скорости источника и приемника *относительно среды*. Поэтому в нашем случае:

$$V'_{\text{ист}} = V_{\text{ист}} - u, \quad V'_{\text{пр}} = -u,$$

$$\begin{aligned} \nu_{\text{пр}} &= \nu_{\text{ист}} \frac{1 - \frac{V'_{\text{пр}}}{v}}{1 - \frac{V'_{\text{ист}}}{v}} = \\ &= \nu_{\text{ист}} \frac{v + u}{v - (V_{\text{ист}} - u)}. \end{aligned}$$

Задача 3. Неподвижный источник испускает звук частотой ν_0 . Найти частоту звука, отраженного от стенки, которая удаляется от источника с постоянной скоростью u . Скорость звука v .

Решение. Процесс отражения состоит из двух последовательных этапов. Сначала стенка играет роль приемника, и воспринимаемая ею частота, согласно формуле (3.71), равна

$$\nu_{\text{ст}} = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{v} \right).$$

На втором этапе стенка играет роль удаляющегося источника звука с частотой $\nu_{\text{ст}}$, поэтому частота отраженного звука, вос-

принимаемого неподвижным наблюдателем, определится по формуле (3.72):

$$v_{\text{отр}} = \frac{v_{\text{ст}}}{1 + \frac{u}{v}} = \frac{v_0 \left(1 - \frac{u}{v}\right)}{1 + \frac{u}{v}} = v_0 \frac{v + u}{v - u}.$$

Задача 4. Источник звуковых колебаний частотой $\nu_0 = 1000$ Гц движется по нормали к стенке со скоростью $u = 0,17$ м/с. На этой же нормали расположены два неподвижных приемника Π_1 и Π_2 , причем последовательность расположения этих приемников и источника \mathcal{I} такова: $\Pi_1 - \mathcal{I} - \Pi_2$ — стенка. Какой приемник регистрирует биения и какова их частота? Скорость звука $v = 340$ м/с.

Решение. Каждый из приемников регистрирует два сигнала: один от источника, а второй — отраженный от стенки. Отражение от стенки было рассмотрено в предыдущей задаче. Поскольку стенка покоится, а источник приближается к ней, то

$$v_{\text{отр}} = \frac{v_0}{1 - \frac{u}{v}}.$$

Источник приближается ко второму приемнику, поэтому он будет регистрировать частоту ν_2 , равную

$$\nu_2 = \frac{v_0}{1 - \frac{u}{v}} = v_{\text{отр}}.$$

Таким образом, второй приемник будет воспринимать два сигнала одинаковой частоты и биений не будет.

Иначе обстоит дело с первым источником. От стенки к нему приходит сигнал с частотой $\nu_{\text{отр}}$, а сигнал от удаляющегося источника будет иметь частоту ν_1

Возникают биения с частотой, равной

Рис. 3.16

Задача 5. Источник звука, частота которого ν_0 , движется равномерно по прямой, отстоящей от неподвижного наблюдателя P на расстояние l (рис. 3.16). Скорость источника составляет η -ю часть скорости звука. Найти:

- а) частоту звука ν , воспринимаемую наблюдателем в момент, когда источник находится в точке O ;
б) расстояние между источни-

ком и наблюдателем в момент, когда воспринимаемая наблюдателем частота $\nu = \nu_0$.

Решение. Ясно, что в момент, когда источник окажется в точке O , наблюдателя достигнет волна, испущенная источником, когда он находился в некоторой точке S . Проекция скорости источника в направлении источника (вдоль линии SP) равна

$$u^* = u \cos \alpha = \frac{u^2}{v}.$$

Поэтому ответ на первый вопрос будет выглядеть так:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{u^*}{v}} = \frac{v_0}{1 - \frac{u^2}{v^2}} = \frac{v_0}{1 - \eta^2}.$$

Для того чтобы выполнялось условие $v = v_0$, скорость сближения источника и наблюдателя должна быть равна нулю. Это произойдет в тот момент, когда источник окажется в точке O . Сигнал, отправленный в этот момент источником, достигнет наблюдателя через время $t = l / v$, а за это время источник переместится на расстояние $x = ut$. Таким образом, расстояние между источником и наблюдателем в этот момент будет равно

$$r = \sqrt{l^2 + x^2} = \sqrt{l^2 + (ut)^2} = l\sqrt{1 + \eta^2}.$$

Это и есть ответ на второй вопрос задачи.

ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

В 60-х годах XIX века Д. К. Максвелл сформулировал систему законов, получивших название *законов Максвелла*, которые составляют основу всей классической электродинамики. Этот шаг был подготовлен работами многих исследователей, в первую очередь Ш. Кулона, А. Ампера, Г. Эрстеда, М. Фарадея и многих других. Максвелл сумел обобщить законы, установленные опытным путем, и создал законченную теорию единого электромагнитного поля. Теория Максвелла позволила с единых позиций описать огромный круг явлений, начиная с электростатического поля неподвижных зарядов и кончая электромагнитной природой света.

Математическим выражением теории Максвелла служат *четыре уравнения Максвелла*, которые можно записать как в интегральной, так и в дифференциальной форме. Сформулируем их.

1. Поток вектора E электрического поля через произвольную замкнутую поверхность пропорционален заряду, который в данный момент находится в объеме, ограниченном этой поверхностью:

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(V)} \rho dV. \quad (4.1)$$

В этом уравнении ρ — объемная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная, равная в системе СИ $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2. Циркуляция вектора \mathbf{E} электрического поля по произвольному замкнутому контуру равна со знаком минус скорости изменения магнитного потока Φ через любую поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (4.2)$$

где \mathbf{B} — индукция магнитного поля.

3. Поток вектора \mathbf{B} магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (4.3)$$

4. Циркуляция вектора \mathbf{B} магнитного поля по произвольному замкнутому контуру пропорциональна сумме двух слагаемых. Первое (4.1) это ток проводимости через поверхность, ограниченную этим контуром, а второе (4.2) пропорционально скорости изменения потока вектора \mathbf{E} через эту же поверхность:

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I_{\text{пр}} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) = \mu_0 \left(\int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} \right), \quad (4.4)$$

где \mathbf{j} — вектор плотности тока проводимости, μ_0 — магнитная постоянная, равная в системе СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Первое уравнение (4.1) указывает на то, что источником электрического поля являются электрические заряды.

Из *второго уравнения* (4.2) следует, что электрическое поле может создаваться переменным магнитным полем. В этом случае электрическое поле является вихревым и его линии напря-

женности замкнуты (напоминаем, что линии напряженности электростатического поля начинаются и заканчиваются на зарядах или уходят в бесконечность).

Третье уравнение (4.3) утверждает, что магнитное поле не имеет источников типа магнитных зарядов.

Согласно *четвертому уравнению* (4.4) магнитное поле создается как токами проводимости, так и переменным электрическим полем.

Из второго (4.2) и четвертого (4.4) уравнений следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать независимо друг от друга. Имеет смысл лишь их совокупность, описывающая единое *электромагнитное поле*.

Интересно, что определенная асимметрия уравнений Максвелла, выраженная в неравноправии электрического и магнитного полей, вызывает у некоторых физиков чувство неудовлетворенности. Еще в 1931 г. П. Дирак, стремясь восстановить это равноправие, высказал предположение о возможности существования магнитных зарядов — их называют «монополями Дирака». С той поры и по сей день предпринимаются попытки обнаружить монополь экспериментально. Его ищут в продуктах ядерных реакций, в метеоритах и даже в донных осадках Мирового океана... Поиски продолжаются. Почему? По значимости открытие монополя можно было бы сравнить с открытием электрона или ядерного строения атома. Но пока законы Максвелла остаются незыблемыми.

Вернемся, однако, к четвертому уравнению (4.4). Оба слагаемых в его правой части совершенно равноправны, и оба могут являться причиной возникновения магнитного поля. Это дало возможность Максвеллу назвать второй член аналогично первому — *током смещения*:

$$I_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{(S)} E dS, \quad (4.5)$$

и тогда уравнение (4.4) принимает вполне понятный и наглядный вид:

$$\oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}). \quad (4.6)$$

Ток смещения можно представить в виде

$$I_{\text{см}} = \int_{(S)} \mathbf{j}_{\text{см}} d\mathbf{S}, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{j}_{\text{см}}$ — плотность тока смещения, равная

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Появление значка частной производной понятно: поток вектора \mathbf{E} через фиксированную поверхность зависит только от времени, тогда как $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Часто возникает вопрос: какой физический смысл имеет ток смещения? На него обычно отвечают так. *Ток смещения — это причина возникновения магнитного поля в отсутствие токов проводимости.* Не очень конкретно, но по сути правильно.

В заключение запишем уравнения Максвелла для среды, обладающей диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ . Делается это очень просто — для этого достаточно в формулы, содержащие ε_0 , добавить ε (получится $\varepsilon_0 \varepsilon$), а в формулы, содержащие μ_0 , добавить μ (будет $\mu_0 \mu$):

$$1. \oint_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_{(V)} \rho dV, \quad (4.9)$$

$$2. \oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (4.10)$$

$$3. \oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (4.11)$$

$$4. \oint_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \mu \left(\int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} \right). \quad (4.12)$$

Последнее уравнение часто записывают с использованием вектора напряженности \mathbf{H} магнитного поля, связанного с вектором \mathbf{B} простым соотношением $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, где μ — магнитная проницаемость среды:

$$4a. \oint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (4.12a)$$

Задача 1. Непроводящее тонкое кольцо массой m , имеющее заряд q , может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, которое начало возрастать во времени по некоторому закону $\mathbf{B}(t)$. Найти угловую скорость ω кольца в зависимости от индукции $\mathbf{B}(t)$.

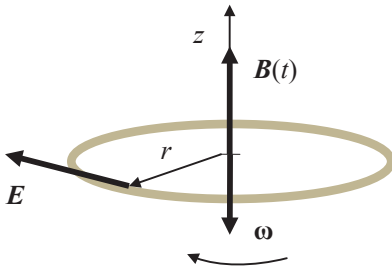


Рис. 4.1

Решение. Суть этой задачи можно определить так. Имеется переменное магнитное поле, которое согласно второму уравнению Максвелла порождает вихревое электрическое поле. Его линии представляют собой окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной направлению вектора \mathbf{B} . Это электрическое поле действует на заряды кольца, приводя его во вращение.

Выберем ось z в направлении магнитного поля (рис. 4.1) и запишем второе уравнение Максвелла

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

в котором контур L совместим с нашим кольцом радиусом r . Тогда

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{(L)} E d\mathbf{l} = E 2\pi r,$$

$$\int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_{(S)} B d\mathbf{S} = B \pi r^2,$$

и уравнение Максвелла принимает вид

$$E = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

На заряды кольца действует сила

$$F = -qE = - \frac{qr}{2} \frac{dB}{dt},$$

момент которой относительно оси z будет равен

$$M_z = Fr = - \frac{qr^2}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$$

и напомним, что в него входит: I_z — момент инерции кольца относительно оси вращения, он равен $I_z = mR^2$, ω — угловая скорость вращения кольца.

После простых преобразований получим

$$d\omega = - \frac{q}{2m} dB,$$

и, проинтегрировав это равенство, придем к окончательному результату

$$\omega = -\frac{q}{2m} B(t).$$

В векторном виде это равенство запишется так:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}(t).$$

Знак минус в этом выражении означает, что вектора $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{B} направлены противоположно друг другу.

Интересно, что в точности такой же результат получится и в случае тела любой формы, если оно обладает осевой (аксиальной) симметрией — в этом случае его можно просто представить в виде множества колец.

Задача 2. Пространство между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму круглых пластин, заполнено однородной слабо проводящей средой с удельной проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Расстояние между обкладками d . Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность H магнитного поля между обкладками на расстоянии r от их оси, если на конденсатор подано переменное напряжение $U = U_m \cos \omega t$.

Решение. Разберемся с условием этой задачи. Прежде всего выясним, что такое *слабо проводящая среда*. Понять это проще всего на таком примере. Рассмотрим воздушный конденсатор. Если зарядить его и отключить от источника, то в идеальном случае заряд на обкладках меняться не будет. Но если мы будем облучать его, например ультрафиолетом, произойдет частичная ионизация молекул воздуха и в пространстве появятся ионы и свободные электроны, которые создадут ток между обкладками — конденсатор начнет разряжаться. Это очень слабый ток, и заряд на обкладках будет убывать постепенно, а не мгновенно — как если бы их соединили проводником.

Итак, с первой причиной возникновения магнитного поля между обкладками разобрались — это слабый ток проводимости, направленный вдоль оси конденсатора (рис. 4.2). Но это еще не все. Еще есть переменное электрическое поле (ведь заряд на обкладках уменьшается), которое также создает магнитное поле. Электрическое поле конденсатора \mathbf{E} одно-

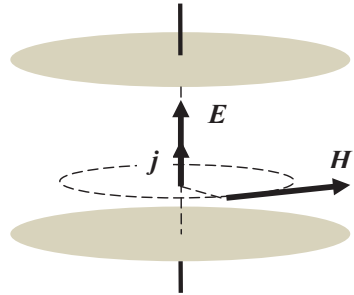


Рис. 4.2

родно и также направлено вдоль его оси. В условии задачи говорится о *напряженности* магнитного поля. Напомним, что напряженность \mathbf{H} и индукция \mathbf{B} магнитного поля связаны простым соотношением $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, где μ — магнитная проницаемость среды (в нашем случае она практически равна единице). Линии магнитного поля представляют собой окружности с центром на оси системы, и вектор \mathbf{H} (так же, как и вектор \mathbf{B}) будет направлен по касательной к ним в любой точке (рис. 4.2). Ход решения понятен — выберем в качестве контура L окружность радиуса r и применим четвертое уравнение Максвелла (4.12a), которое в данном случае запишется так:

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1)$$

Рассмотрим каждый из членов этого уравнения в отдельности. Начнем с интеграла в левой части:

$$\int_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} H dl = H 2\pi r. \quad (2)$$

Прежде чем начнем вычислять интегралы в правой части, необходимо кое-что вспомнить. Напряженность электрическо-

го поля конденсатора определяется формулой $E = U/d$. Плотность тока проводимости $j = \sigma E = \sigma U/d$, площадь поверхности S , ограниченной контуром L , равна πr^2 . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} &= \frac{d}{dt} \int_{(S)} E dS = \frac{dE}{dt} \pi r^2 = \frac{1}{d} \frac{dU}{dt} \pi r^2 = \\ &= -\omega \frac{U_m}{d} \pi r^2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \mathbf{j} d\mathbf{S} &= \int_{(S)} j dS = j \pi r^2 = \sigma E \pi r^2 = \sigma \frac{U}{d} \pi r^2 = \\ &= \sigma \frac{U_m}{d} \pi r^2 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Нам осталось подставить формулы (2) — (4) в уравнение (1):

$$H = \frac{U_m r}{2d} (\sigma \cos \omega t - \varepsilon \varepsilon_0 \omega \sin \omega t).$$

Ответ получен, но это выражение можно привести к более компактному виду, используя простой прием. Умножим и разделим правую часть этого выражения на $\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}$:

$$H = \frac{U_m r}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}} \cos \omega t - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega}{\sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}} \sin \omega t \right).$$

Коэффициенты, стоящие перед косинусом и синусом, не превышают единицу, и сумма их квадратов равна единице. А это значит, что эти коэффициенты можно представить как косинус и синус некоторого угла α , который можно определить из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon \varepsilon_0 \omega / \sigma$. Используя элементарную тригонометрию, получаем окончательно

$$H = H_m \cos (\omega t + \alpha),$$

$$\text{где } H_m = \frac{U_m r}{2d} \sqrt{\sigma^2 + (\varepsilon \varepsilon_0 \omega)^2}.$$

Задача 3. Плоский воздушный конденсатор, обкладки которого имеют форму дисков радиуса $R = 6,0$ см, подключен к переменному синусоидальному напряжению частотой $\omega = 1000$ с⁻¹. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри конденсатора.

Решение. Синусоидальное напряжение на обкладках создаст в объеме конденсатора переменное электрическое поле, напряженность которого изменяется по гармоническому закону, и эту зависимость можно записать в виде

$$E = E_m \cos \omega t.$$

Объемная плотность энергии этого поля определяется формулой

$$w_E = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2},$$

и энергия электрического поля W_E , запасенная в объеме V между обкладками, вычисляется очень легко (ведь электрическое поле — однородно):

$$W_E = w_E V = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_m^2 \cos^2 \omega t}{2} \pi R^2 h,$$

где h — расстояние между обкладками. Из этого выражения легко найти амплитудное (т. е. максимальное) значение энергии электрического поля:

$$(W_E)_{\max} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E_m^2}{2} \pi R^2 h. \quad (1)$$

Займемся магнитным полем. Откуда оно взялось? Его породило переменное электрическое поле. Все ясно — применим четвертое уравнение Максвелла (4.12а). Ток проводимости отсутствует, поэтому

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S}, \quad (2)$$

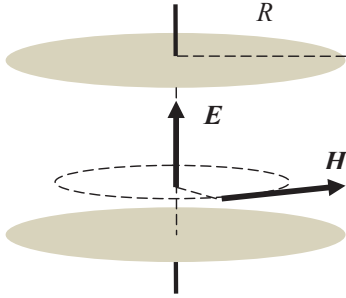


Рис. 4.3

Вектор E направлен параллельно оси системы (рис. 4.3). Линии магнитной индукции (и, соответственно, вектора H) представляют собой окружности с центром на этой оси. Вектор H направлен по касательной к ним в любой точке. В качестве контура L выберем окружность радиуса r , изображенную пунктиром на рис. 4.3. Начнем с интеграла в левой части уравнения (2):

$$\int_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} H d\mathbf{l} = H \pi r.$$

Рассмотрим правую часть этого уравнения, не забывая о том, что электрическое поле между обкладками плоского конденсатора однородно:

$$\frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} E d\mathbf{S} = \frac{dE}{dt} \pi r^2 = -\omega E_m \pi r^2 \sin \omega t.$$

Подставим полученные выражения в уравнение (2) и найдем напряженность магнитного поля

$$H = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega E_m r}{2} \sin \omega t = -H_m r \sin \omega t,$$

введя обозначение

$$H_m = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \omega E_m}{2}.$$

Эта величина имеет смысл амплитудного (т.е. максимального) значения напряженности магнитного поля на расстоянии r от оси системы.

Для того чтобы вычислить энергию магнитного поля, воспользуемся формулой

$$W_M = \int_V w_M dV,$$

где w_M — объемная плотность энергии магнитного поля, определяемая как

$$w_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

Невозможно посчитать этот интеграл так, как сделали это для электрического поля — напряженность H (и, соответственно, объемная плотность энергии) зависит от r . Как быть? Представим объем между обкладками конденсатора V в виде множества тонких цилиндрических слоев (бесконечно тонких!). Объем одного такого слоя равен $dV = 2\pi rh dr$ и в его пределах объемная плотность энергии одинакова. Теперь можно вычислить энергию магнитного поля в объеме конденсатора:

$$\begin{aligned} W_M &= \int_V \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} dV = \mu\mu_0 H_m^2 \pi h \sin^2 \omega t \int_0^R r^3 dr = \\ &= \frac{1}{4} \mu\mu_0 H_m^2 \pi h R^4 \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Из этой формулы легко найти амплитудное значение энергии магнитного поля

$$(W_M)_{\max} = \frac{1}{4} \mu\mu_0 H_m^2 \pi h R^4$$

и с учетом формулы (1) получим

$$\frac{(W_M)_{\max}}{(W_E)_{\max}} = \frac{\mu\mu_0 H_m^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 E_m^2} R^2 = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 = 5,0 \cdot 10^{-15}.$$

При записи ответа учтено, что в воздухе диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$, магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.

Задача 4. Соленоид имеет n витков на единицу длины. По нему протекает переменный ток $I = I_m \sin \omega t$. Найти плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Радиус сечения соленоида R . $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$.

Решение. Ток, протекающий в соленоиде, создает внутри него однородное магнитное поле, направленное вдоль его оси. Его индукция равна

$$B = \mu_0 n I.$$

Ток — переменный, значит, и магнитное поле будет меняться со временем. Согласно второму уравнению Максвелла (4.2) оно порождает вихревое электрическое поле, линии которого замкнуты и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} . В нашем случае это окружности, центры которых лежат на оси соленоида (рис. 4.4). Возьмем в качестве контура L окружность радиуса r (она изображена пунктиром на этом рисунке). Рассмотрим левую часть уравнения (4.2). Вектор \mathbf{E} в каждой точке этого контура направлен по касательной к окружности и имеет одну и ту же величину, поэтому

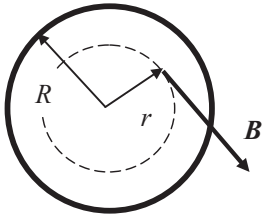


Рис. 4.4

$$\int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{(S)} E d\mathbf{l} = E \pi r. \quad (1)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} &= \frac{d}{dt} \int_{(S)} B dS = \frac{dB}{dt} \pi r^2 = \\ &= \mu_0 n \frac{dI}{dt} \pi r^2 = \mu_0 n I_m \omega \pi r^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и найдем напряженность электрического поля, созданного переменным магнитным полем:

$$E = -\frac{r}{2}\mu_0 n I_m \omega \cos \omega t.$$

Рассмотрим плотность тока смещения. Согласно формуле (4.8) найдем плотность тока смещения внутри соленоида

$$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r}{2}\mu_0 n I_m \omega^2 \sin \omega t.$$

Оказывается, что переменное электрическое поле возникает и вне соленоида. Рассмотрим контур L в виде окружности радиуса $r' > R$. Циркуляция вектора E по этому контуру будет описываться тем же выражением (1), а вот интеграл в правой части уравнения (4.2) будет иным — магнитное поле существует только внутри соленоида, поэтому площадь поверхности S , по которой происходит интегрирование в правой части, не будет зависеть от r , а будет равна площади поперечного сечения соленоида πR^2 :

$$\frac{d}{dt} \int_{(S)} B dS = \frac{dB}{dt} \pi R^2 = \mu_0 n I_m \omega \pi R^2 \cos \omega t.$$

Тогда напряженность электрического поля, созданного переменным магнитным полем вне соленоида, определится выражением

$$E = -\frac{R^2}{2r}\mu_0 n I_m \omega \cos \omega t,$$

и плотность тока смещения будет равна

$$j_{\text{см}} = \frac{R^2}{2r}\mu_0 n I_m \omega^2 \sin \omega t.$$

Задача 5. Переменный синусоидальный ток частотой $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ течет по обмотке прямого соленоида, радиус сечения которого $R = 6,0 \text{ см}$. Найти отношение амплитудных значений энергий электрического и магнитного полей внутри соленоида.

Решение. Синусоидальный ток $I = I_m \cos \omega t$ создает в объеме соленоида переменное магнитное поле, напряженность которого меняется со временем по закону

$$H = nI = nI_m \cos \omega t = H_m \cos \omega t. \quad (1)$$

Это поле однородно, и поэтому его энергию W_M в объеме соленоида можно посчитать очень легко:

$$W_M = \int_V w_M dV = w_M V = \frac{\mu_0 H^2}{2} V = \frac{\mu_0 H_m^2}{2} \pi R^2 l \cos^2 \omega t,$$

где l — длина соленоида.

Из этой формулы видно, что амплитудное значение энергии магнитного поля равно

$$(W_M)_{\max} = \frac{\mu_0 H_m^2}{2} \pi R^2 l. \quad (2)$$

Рассмотрим электрическое поле. Причина его возникновения ясна — это переменное магнитное поле. Напряженность этого вихревого электрического поля уже определили в задаче 4:

$$E = -\frac{r}{2} \mu_0 n I_m \omega \cos \omega t,$$

где r — расстояние от оси соленоида. С учетом равенства (1) эта формула принимает вид

$$E = -\frac{r}{2} \mu_0 H_m \omega \cos \omega t.$$

Для вычисления энергии электрического поля W_E в объеме соленоида V воспользуемся формулой

$$W_E = \int_V w_E dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV,$$

где w_E — объемная плотность энергии электрического поля.

Представим объем соленоида V в виде множества тонких цилиндрических слоев (бесконечно тонких!). Объем одного такого слоя равен $dV = 2\pi r l dr$, и в пределах его объемная плотность энергии одинакова. Теперь можно вычислить энергию электрического поля в объеме соленоида:

$$\begin{aligned} W_E &= \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 (\mu_0 H_m \omega \cos \omega t)^2 \int_0^R r^3 dr = \\ &= \frac{\pi}{16} \varepsilon_0 (\mu_0 H_m \omega)^2 R^4 l \cos^2 \omega t. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее перед знаком косинуса, есть амплитудное (т.е. максимальное) значение энергии электрического поля в объеме соленоида:

$$(W_E)_{\max} = \frac{\pi}{16} \varepsilon_0 (\mu_0 H_m \omega)^2 R^4 l. \quad (3)$$

Нам осталось разделить выражение (2) на (3) и получить ответ:

$$\frac{(W_E)_{\max}}{(W_M)_{\max}} = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 = 5,0 \cdot 10^{-15}.$$

4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла, рассмотренные в предыдущем параграфе, записаны в *интегральном виде*. Представим их в *дифференциальной форме*, т.е. в виде дифференциальных уравнений. Делается это так. Начнем с первого уравнения (4.9) и преобразуем его левую часть при помощи теоремы Гаусса:

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_{(V)} (\nabla \mathbf{E}) dV,$$

где объем V ограничен замкнутой поверхностью S , и $\nabla \mathbf{E}$ — дивергенция вектора \mathbf{E} (∇ — оператор *набла*, $\nabla = \partial / \partial x \mathbf{i} + \partial / \partial x \mathbf{j} + \partial / \partial x \mathbf{k}$).

Тогда уравнение (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{(V)} (\nabla \mathbf{E}) dV &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_{(V)} \rho dV, \\ (\nabla \mathbf{E}) &= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Получили первое уравнение Максвелла в *дифференциальной форме*.

Применим к левой части второго уравнения (4.10) теорему Стокса:

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{(S)} [\nabla \times \mathbf{E}] d\mathbf{S},$$

где S — поверхность, ограниченная замкнутым контуром L , а $[\nabla \times \mathbf{E}]$ — ротор вектора \mathbf{E} . Запишем второе уравнение Максвелла в виде

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Третье уравнение Максвелла преобразуется так же, как первое, а четвертое — подобно второму:

$$(\nabla \mathbf{B}) = 0, \quad (4.15)$$

$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \mu_0 \mu \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (4.16)$$

Получили систему уравнений Максвелла в среде в *дифференциальной форме*. Часто в этих уравнениях используют вектор *напряженности магнитного поля* \mathbf{H} , который связан с индукцией \mathbf{B} простой формулой

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (4.17)$$

и тогда система уравнений (4.13)– (4.16) принимает вид:

$$(\nabla \mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho, \quad (4.18)$$

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4.19)$$

$$(\nabla \mathbf{H}) = 0, \quad (4.20)$$

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Главный смысл и значение уравнений Максвелла в дифференциальной форме заключается в том, что они содержат *уравнения движения электромагнитного поля*. Это означает, что в результате решения этих уравнений могут быть найдены сами поля \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме совместно с уравнением движения заряженных частиц в электромагнитном поле

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (4.22)$$

составляют фундаментальную систему уравнений, которая в принципе достаточна для описания всех электромагнитных явлений, в которых не проявляются квантовые эффекты.

В заключение подчеркнем, что уравнения Максвелла нельзя доказать или вывести из каких-то более общих теоретических соображений. Они являются основными *постулатами* электродинамики, полученными как результат обобщения опытных фактов. Они играют в электродинамике ту же роль, что и законы Ньютона в механике или начала термодинамики.

4.3. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Из уравнений Максвелла следует очень важный вывод: электромагнитное поле может существовать в пространстве *даже в отсутствие зарядов и токов*. В этом случае электромагнитное поле представляет собой *электромагнитную волну*, распространяющуюся в пространстве. Убедимся в этом.

При отсутствии зарядов и токов $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, поэтому уравнения (4.18)–(4.21) принимают вид:

$$(\nabla \mathbf{E}) = 0, \quad (4.23)$$

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4.24)$$

$$(\nabla \mathbf{H}) = 0, \quad (4.25)$$

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.26)$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (4.24):

$$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}]] = -\mu_0 \mu \left[\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right]$$

и распишем двойное векторное произведение в левой части по известному правилу: $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$:

$$\nabla(\nabla \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{H}].$$

Учитывая уравнения (4.23) и (4.26), получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.27)$$

Это *волновое уравнение* для электрической составляющей электромагнитной волны, которое подтверждает волновой характер поведения вектора \mathbf{E} .

Аналогичные расчеты, проведенные для магнитной составляющей (с использованием уравнения (4.26)), приводят к уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon_0 \varepsilon_{\mu_0} \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.28)$$

Итак, мы убедились, что электромагнитное поле способно существовать *самостоятельно* — без электрических зарядов и токов. При этом оно представляет собой *электромагнитную волну*.

Решения уравнений (4.27) и (4.28) в случае плоской волны имеют вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}), \quad (4.29)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r}), \quad (4.30)$$

где $\mathbf{E}_m = (E_{mx}, E_{my}, E_{mz})$, $\mathbf{H}_m = (H_{mx}, H_{my}, H_{mz})$, $|\mathbf{k}| = \omega / v$.

Эти уравнения часто записывают в комплексной форме подобно тому, как мы сделали это для гармонических колебаний в первой главе (см., например, формулу (1.43)):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}. \quad (4.32)$$

Как было показано в третьей главе (см. формулу (3.27)), коэффициент перед вторым членом в левой части волнового уравнения (4.27) равен $1/v^2$, где v — скорость распространения волны. Таким образом, скорость распространения электромагнитной волны в среде равна

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mu_0} \mu}}. \quad (4.33)$$

В электростатике использовали коэффициент

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (Н} \cdot \text{м}^2) / \text{Кл}^2,$$

из которого следует, что

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2).$$

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Рассмотрим их комбинацию:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} = c. \quad (4.34)$$

Итак, скорость распространения электромагнитной волны в среде равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (4.35)$$

Среды, в которых распространяются электромагнитные волны, обладают магнитной проницаемостью $\mu \approx 1$, поэтому формулу (4.35) обычно записывают в более простом виде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (4.36)$$

В вакууме $v = c$.

Впервые существование электромагнитных волн было предсказано Д. К. Максвеллом. К этому выводу он пришел, анализируя сформулированные им уравнения. Однако опытное подтверждение это предсказание получило только в 1888 г., спустя девять лет после его смерти. Эти опыты были осуществлены Г. Герцем.

Задача. Плоская электромагнитная волна с частотой $\nu = 10 \text{ МГц}$ распространяется в слабо проводящей среде с удельной проводимостью $\sigma = 10 \text{ мСм/м}$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$. Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.

Решение. Воспользуемся уравнением плоской волны (4.29) и найдем плотность тока проводимости:

$$j_{\text{пр}} = \sigma E = \sigma E_m \cos(\omega t - kr).$$

Его амплитудное значение равно $(j_{\text{пр}})_{\text{max}} = \sigma E_m$.

Для того чтобы найти ток смещения, применим формулу (4.8):

$$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = -\varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m \sin(\omega t - kr).$$

Амплитудное значение тока смещения равно $(j_{\text{см}})_{\text{max}} = \varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m$.

Найдем их отношение:

$$\frac{(j_{\text{пр}})_{\text{max}}}{(j_{\text{см}})_{\text{max}}} = \frac{\sigma E_m}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega E_m} = \frac{\sigma}{2\pi \nu \varepsilon_0 \varepsilon} = 2.$$

4.4. СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Первые опыты с электромагнитными волнами были осуществлены Г. Герцем в 1888 г. Для получения волн Герц использовал изобретенный им излучатель, что позволило получить электромагнитные волны различной длины — от 0,6 до 10 м. Герц обнаружил, что электромагнитные волны распространяются в непроводящих средах и отражаются от металлических поверхностей. Подобно световым, электромагнитные волны преломляются на границе раздела двух сред.

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил волны длиной 6 мм и исследовал их распространение в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление электромагнитных волн. А в 1896 г. А. А. Попов с помощью электромагнитных волн впервые осуществил пере-

дачу сообщения на расстояние 250 м, заложив тем самым основы радиотехники.

Одним из важнейших свойств электромагнитной волны является ее *поперечность*. Докажем это, используя уравнения Максвелла. Для этого рассмотрим плоскую волну:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{E}_m = (E_{mx}, E_{my}, E_{mz}), \quad \mathbf{H}_m = (H_{mx}, H_{my}, H_{mz}), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z, \quad (4.40)$$

и воспользуемся вторым уравнением Максвелла (4.24). Сначала займемся его левой частью:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{E}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= -i \left((k_y E_z - k_z E_y) \mathbf{i} + (k_z E_x - k_x E_z) \mathbf{j} + (k_x E_y - k_y E_x) \mathbf{k} \right) = \\ &= -i [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Чтобы проведенные выше расчеты были более понятны, рассмотрим в качестве примера один из членов:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(E_{mz} e^{i(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))} \right) = -i k_y E_{mz} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -i k_y E_z.$$

Посчитаем производную в правой части уравнения (4.24)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{H}_m e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \right) = i \omega \mathbf{H}$$

и запишем уравнение (4.24) в виде

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \omega \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (4.42)$$

Проведем аналогичные расчеты с использованием уравнения (4.26) и получим

$$[\mathbf{H} \times \mathbf{k}] = \omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}. \quad (4.43)$$

Из этих уравнений следует ряд очень важных выводов. Во-первых, мы доказали, что электромагнитные волны — *волны поперечные* (рис. 4.5), и это можно записать как

$$(\mathbf{E}\mathbf{H}) = (\mathbf{E}\mathbf{k}) = (\mathbf{k}\mathbf{H}) = 0. \quad (4.44)$$

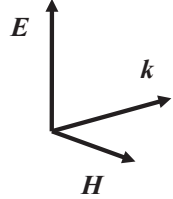


Рис. 4.5

При этом вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} образуют *правую тройку векторов*.

Особо отметим, что равенства (4.44) выполняются *во всех системах отсчета*.

Во-вторых, запишем уравнения (4.42) и (4.43) в скалярной форме

$$kE = \omega \mu_0 \mu H, \quad (4.45)$$

$$kH = \omega \varepsilon_0 \varepsilon E \quad (4.46)$$

и разделим одно на другое:

$$\frac{E}{H} = \frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (4.47)$$

Из этого равенства следует, что вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} изменяются *синфазно*: они одновременно обращаются в нуль и одновременно достигают максимальных значений.

Задача. Плоская электромагнитная волна $E = E_m \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})$ распространяется в вакууме. Считая векторы E_m и \mathbf{k} известными, найти вектор \mathbf{H} как функцию времени t в точке с радиус-вектором $\mathbf{r} = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением (4.30) и равенством (4.42) и запишем ответ

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu_0} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_m] \cos \omega t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_m] \cos kct.$$

Здесь учли, что $\omega = kc$, $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

4.5. СТОЯЧАЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА

Ранее в п. 3.2 было показано, что стоячая упругая волна возникает в результате наложения двух одинаковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Это относится и к электромагнитным волнам. Здесь, однако, следует учесть, что электромагнитная волна характеризуется не одним вектором, а двумя взаимно перпендикулярными векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} , образующими совместно с волновым вектором \mathbf{k} правую тройку векторов.

Пусть первая волна распространяется вдоль оси z и описывается уравнениями:

$$E = E_m \cos(\omega t - kz), \quad (4.48)$$

$$H = H_m \cos(\omega t - kz). \quad (4.49)$$

Взаимное направление векторов этой волны изображено на рис. 4.6, *a*.

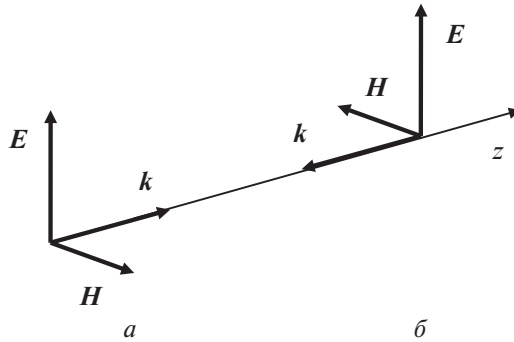


Рис. 4.6

Уравнения волны, распространяющейся в обратном направлении, можно получить, если в уравнениях (4.48) и (4.49) поставить знак плюс перед волновым числом k и минус — перед вектором \mathbf{H}_m (рис. 4.6, б):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + kz), \quad (4.50)$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{H}_m \cos(\omega t + kz). \quad (4.51)$$

В результате наложения этих волн получаем

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_m \cos kz \cdot \cos \omega t, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{H}_m \sin kz \cdot \sin \omega t. \quad (4.53)$$

Это и есть уравнения *стоячей электромагнитной волны*. Она состоит из двух стоячих волн — электрической и магнитной. В этой волне колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе на $\pi/2$ как в пространстве, так и во времени: если в некоторый момент \mathbf{E} имеет максимальное значение, то $\mathbf{H} = 0$. Через четверть периода картина будет обратной: \mathbf{H} достигнет максимального значения со сдвигом в пространстве на $\lambda/4$, а \mathbf{E} обратится в нуль. Таким образом, в процессе колебаний электрическое поле

переходит в магнитное и наоборот. Поскольку колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} происходят не в фазе, соотношение (4.47) оказывается справедливым только для амплитудных значений E_m и H_m :

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_m = \sqrt{\mu_0 \mu} H_m. \quad (4.54)$$

4.6. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Электромагнитная волна имеет электрическую и магнитную составляющие: каждая из них обладает энергией. Поэтому объемную плотность энергии w электромагнитной волны можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$w = w_E + w_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

С учетом соотношения (4.47) эту сумму можно переписать так:

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E \cdot \sqrt{\mu_0 \mu} H = \frac{1}{v} EH. \quad (4.55)$$

При записи конечного выражения воспользовались формулой (4.33).

Волна не только обладает энергией, но и *переносит энергию* в пространстве. *Потоком энергии* Φ электромагнитной волны через поверхность σ называется энергия, переносимая волной через эту поверхность в единицу времени. Записать это можно так. Пусть за время dt через поперечную площадку σ переносится энергия dW . Следовательно,

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

За это время через площадку σ будет перенесена энергия, находящаяся в объеме $dV = vdt\sigma$ (см. рис. 4.7), равная $dW = wdV = wvdt\sigma$.

Тогда

$$\Phi = \nu \nu \sigma.$$

Энергия, переносимая в единицу времени через единичную поперечную площадку, представляет собой *плотность потока энергии* S :

$$S = \frac{\Phi}{\sigma} = \nu \nu = EH. \quad (4.56)$$

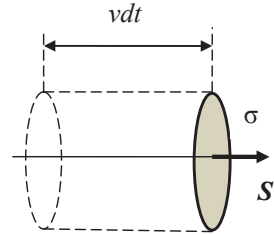


Рис. 4.7

Введем *вектор плотности потока энергии* \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (4.57)$$

который называют *вектором Пойнтинга*. Он указывает направление переноса энергии (оно совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k}), и его модуль равен плотности потока энергии электромагнитной волны.

При решении многих задач удобно использовать *среднее значение* плотности потока энергии (4.50), которое называют *интенсивностью* I волны:

$$I = \langle EH \rangle.$$

Если вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} изменяются по гармоническому закону (4.48)–(4.49), то это выражение принимает простой вид

$$I = E_m H_m \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{E_m H_m}{2}. \quad (4.58)$$

Задача 1. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда электрической составляющей $E_m = 50$ мВ/м. Найти среднее за период колебания значение плотности потока энергии.

Решение. Среднее за период колебания значение плотности потока энергии — это интенсивность волны. В выраже-

нии (4.58) H_m неизвестно, но у нас есть формула (4.47), которая в вакууме принимает вид

$$H_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m.$$

Подставим это выражение в формулу (4.58) и получим

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_m^2,$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Задача 2. Шар радиуса $R = 50$ см находится в немагнитной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4,0$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна с длиной волны $\lambda \ll R$ и амплитудой электрической составляющей $E_m = 2000$ В/м. Какая энергия падает на шар за время $t = 1,0$ мин?

Решение. Обсудим условие этой задачи на простом и наглядном примере. Пусть речь идет о плоской световой волне, на пути которой мы поместили шар. Расположим за шаром экран (рис. 4.8). На экране появится тень этого шара — круг радиуса R . Это значит, что шар поглощает столько же энергии, что и диск того же радиуса. Это очень упрощает задачу.

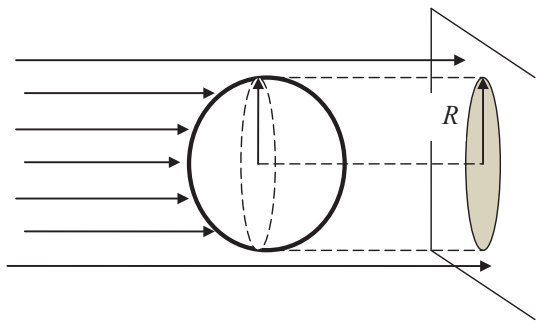


Рис. 4.8

Как найти эту энергию? Строго говоря, это надо делать так:

$$W = \int_0^t \Phi dt,$$

где Φ — поток энергии, падающий на диск (поток энергии — это энергия, падающая на диск в единицу времени). Его можно выразить через плотность потока энергии, т. е. через модуль вектора Пойнтинга:

$$\Phi = \int_{\sigma} S d\sigma,$$

где $\sigma = \pi R^2$ — площадь диска. Волна плоская, поэтому

$$\Phi = S\pi R^2.$$

Время регистрации ($t = 1,0$ мин) гораздо больше периода колебаний электромагнитной волны. Оценить это можно очень просто: период колебаний $T = \lambda / \nu = \lambda \sqrt{\epsilon} / c$, $\lambda \ll R$, то есть $T \ll R\sqrt{\epsilon} / c \approx 0,33 \cdot 10^{-8}$ с, а это значит, что $T \ll t$, и можно перейти к усредненным значениям:

$$W = \Phi t = S\pi R^2 t = \frac{E_m H_m}{2} t.$$

Воспользуемся формулой (4.47) и получим окончательный ответ

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \pi R^2 t = 5,0 \text{ кДж}.$$

Задача 3. Плоский конденсатор с круглыми пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени.

Решение. Будем считать для определенности, что нижняя обкладка конденсатора заряжается положительно, а верхняя —

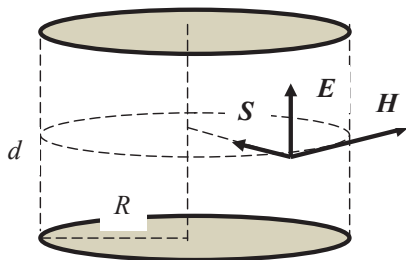


Рис. 4.9

отрицательно (рис. 4.9). Это значит, что вектор напряженности электрического поля E направлен вверх (а само поле является однородным). Заряды на обкладках увеличиваются — значит, напряженность поля тоже будет возрастать. Согласно четвертому уравнению Максвелла перемен-

ное электрическое поле приводит к возникновению магнитного поля, линии которого представляют собой окружности с центром на оси системы. Вектор H направлен по касательной к окружности в каждой точке, и поэтому в соответствии с формулой (4.57) вектор Пойнтинга S будет направлен радиально к оси (рис. 4.9). Это вполне понятно — энергия конденсатора увеличивается, поэтому поток электромагнитной энергии направлен в объем, находящийся между обкладками конденсатора.

Зададим размеры конденсатора (R — радиус обкладок, d — расстояние между ними) и воспользуемся уравнением (4.12а), которое в отсутствие токов проводимости принимает вид

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (1)$$

Рассмотрим левую его часть и выберем в качестве контура L окружность радиуса R , изображенную пунктиром на рис. 4.9:

$$\int_{(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(S)} H d\mathbf{l} = H 2\pi R.$$

Рассмотрим правую часть уравнения (1), не забывая о том, что электрическое поле между обкладками плоского конденсатора однородно:

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} E d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d}{dt} \int_{(S)} E dS = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dt} \pi R^2.$$

Приравнявая эти выражения, найдем напряженность магнитного поля на боковой поверхности конденсатора

$$H = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dt} \frac{R}{2}.$$

Теперь по формуле (4.56) можно найти модуль вектора Пойнтинга:

$$S = EH = \varepsilon_0 \varepsilon E \frac{dE}{dt} \frac{R}{2}.$$

Отметим — модуль вектора одинаков по величине во всех точках (электрическое поле однородно), при этом вектор \mathbf{S} во всех точках боковой поверхности конденсатора направлен по нормали к ней.

С учетом сказанного вычислим поток Φ вектора Пойнтинга через боковую поверхность конденсатора σ ($\sigma = 2\pi R d$):

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{(\sigma)} \mathbf{S} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(\sigma)} S d\sigma = S 2\pi R d = \varepsilon_0 E \frac{dE}{dt} \pi R^2 d = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V \right) = \frac{d}{dt} (w_E V) = \frac{dW_E}{dt}. \end{aligned}$$

Производная по времени дает скорость изменения энергии электрического поля конденсатора, т. е. приращение энергии конденсатора за единицу времени. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Ток, протекающий по обмотке длинного соленоида, медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

Решение. Ток, протекающий по обмотке соленоида, создает в его объеме магнитное поле. При увеличении тока индукция

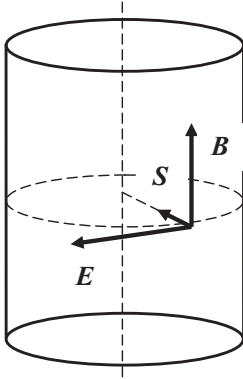


Рис. 4.10

этого поля \mathbf{B} возрастает и, согласно второму уравнению Максвелла (4.10), возникает вихревое электрическое поле \mathbf{E} , линии которого представляют собой окружности с центром на оси соленоида (рис. 4.10).

Решение задачи по сути напоминает задачу предыдущую — надо найти поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность соленоида и показать, что он равен скорости возрастания энергии магнитного поля в соленоиде.

Найдем напряженность электрического поля на боковой поверхности соленоида, считая, что его радиус равен R . Возьмем в качестве контура L окружность радиуса R (она изображена пунктиром на рис. 4.10). Рассмотрим левую часть уравнения (4.10). Вектор \mathbf{E} в каждой точке этого контура направлен по касательной к окружности и имеет одну и ту же величину, поэтому

$$\oint_{(L)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_{(L)} E_l dl = E_l 2\pi R.$$

Обратим внимание на индекс l — он указывает на то, что речь в этом выражении идет о *проекции* вектора \mathbf{E} на направление обхода контура (в нашем случае он происходит против часовой стрелки, если смотреть сверху).

Преобразуем правую часть уравнения (4.10) с учетом однородности поля \mathbf{B} :

$$\frac{d}{dt} \int_{(S)} \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int_{(S)} B dS = \frac{dB}{dt} \pi R^2 = \mu_0 \frac{dH}{dt} \pi R^2.$$

(Интеграл берется по поверхности S , ограниченной контуром L . Не будем путать ее с вектором Пойнтинга).

Подставим полученные выражения в уравнение (4.10):

$$E_l = -\mu_0 \frac{dH}{dt} \frac{R}{2}.$$

Знак минус в этом выражении говорит о том, что вектор \mathbf{E} направлен противоположно направлению обхода контура, при этом его модуль равен

$$E = \mu_0 \frac{dH}{dt} \frac{R}{2}.$$

Найдем модуль вектора Пойнтинга

$$S = EH = \mu_0 H \frac{dH}{dt} \frac{R}{2}.$$

Модуль этого вектора одинаков по величине во всех точках (магнитное поле однородно), при этом вектор \mathbf{S} во всех точках боковой поверхности σ соленоида направлен по нормали к ней в сторону оси системы.

С учетом сказанного вычислим поток Φ вектора Пойнтинга через боковую поверхность соленоида σ ($\sigma = 2\pi Rl$):

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{(\sigma)} \mathbf{S} d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(\sigma)} S d\sigma = S 2\pi R d = \mu_0 H \frac{dH}{dt} \pi R^2 l = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 H^2}{2} V \right) = \frac{d}{dt} (w_M V) = \frac{dW_M}{dt}. \end{aligned}$$

Производная по времени дает скорость изменения энергии магнитного поля соленоида, т. е. приращение энергии соленоида за единицу времени. Что и требовалось доказать.

Задача 5. Нерелятивистские протоны, ускоренные разностью потенциалов U , образуют пучок круглого сечения с током I . Найти модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси.

Решение. Для начала разберемся с условием задачи. Пусть протоны летят слева направо (см. рис. 4.11). Этот пучок эк-

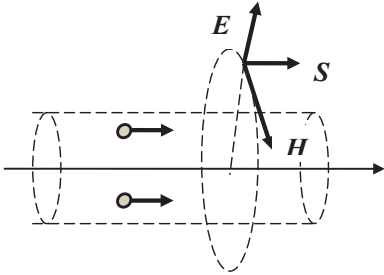


Рис. 4.11

вивалентен току I , протекающему в том же направлении. Этот ток создает в окружающем пространстве магнитное поле, напряженность которого равна

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Направление вектора H указано на рис. 4.11. С другой стороны, этот пучок эквивалентен длинному проводнику, заряженному с линейной плотностью заряда λ , который создает в окружающем пространстве электрическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Таким образом, вектор Пойнтинга S направлен в ту же сторону, что и пучок протонов (рис. 4.11), и его модуль равен

$$S = EH = \frac{I\lambda}{2\pi^2\epsilon_0 r^2}.$$

Вопрос заключается в том, чему же равна λ . По смыслу это заряд, приходящийся на единицу длины проводника, т. е. в нашем случае — суммарный заряд протонов, находящихся на участке пучка единичной длины. Его можно записать в виде

$$\lambda = enS, \quad (1)$$

где e — заряд протона, n — их концентрация, S — площадь поперечного сечения пучка. Концентрацию мы не знаем, но ее можно найти из формулы, связывающей силу тока в проводнике с концентрацией свободных зарядов и средней скоростью u их упорядоченного движения:

$$I = enuS.$$

Здесь, однако, следует учесть, что протоны в пучке имеют вполне определенную скорость v , поэтому

$$I = envS. \quad (2)$$

Эту скорость можно найти, применив теорему о кинетической энергии: изменение кинетической энергии частицы равно работе сил, действующих на нее. В нашем случае это работа электрических сил, она равна: $A = eU$. Итак, протоны приобрели кинетическую энергию, пройдя ускоряющую разность потенциалов U , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= eU, \\ v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \end{aligned}$$

Из формулы (2) находим

$$n = \frac{I}{evS} = \frac{I}{eS} \sqrt{\frac{m}{2eU}},$$

подставляем это выражение в равенство (1):

$$\lambda = enS = I \sqrt{\frac{m}{2eU}}$$

и, наконец, получаем ответ

$$S = \frac{I^2}{4\pi^2 \epsilon_0 r^2} \sqrt{\frac{m}{2eU}}.$$

4.7. ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Вспомним кое-что из теории относительности. Энергия релятивистской частицы определяется формулой

$$W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

где m — масса частицы, p — ее импульс, c — скорость света.

Согласно современным представлениям электромагнитную волну можно представить как поток *фотонов*. Масса фотона равна нулю, поэтому его импульс

$$p_{\Phi} = \frac{1}{c}W_{\Phi}. \quad (4.59)$$

Пусть n — концентрация фотонов:

$$np_{\Phi} = \frac{1}{c}nW_{\Phi}.$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства, есть не что иное, как *объемная плотность G импульса* электромагнитной волны, т. е. $np_{\Phi} = G$. Правая часть — это *объемная плотность w энергии* электромагнитной волны: $nW_{\Phi} = w$. Тогда

$$G = \frac{1}{c}w = \frac{1}{c^2}EH \quad (4.60)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c^2}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]. \quad (4.61)$$

При переходе к средним значениям получим

$$\langle G \rangle = \frac{1}{c^2} \langle EH \rangle = \frac{I}{c^2}, \quad (4.62)$$

где I — интенсивность волны.

Рассмотрим волну, падающую нормально на площадку S и полностью поглощаемую ею (см. рис. 4.12). За время dt ей будет сообщен импульс dp , заключенный в объеме $dV = Scdt$ и равный

$$dp = \langle G \rangle Scdt = \frac{I}{c}Sdt.$$

Это означает, что площадка будет испытывать *силу давления*, которая, согласно второму закону Ньютона, равна

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{I}{c} S.$$

Нам осталось определить *давление* p^* , которое волна оказывает на эту площадку:

$$p^* = \frac{F}{S} = \frac{I}{c}. \quad (4.63)$$

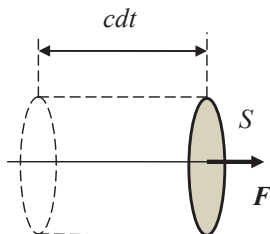


Рис. 4.12

Для идеально отражающей поверхности, кстати, давление будет в два раза больше.

Надо сказать, что при обычных условиях это давление очень мало. Например, солнечный свет оказывает давление порядка 10^{-5} Па (а нормальное атмосферное давление имеет величину 10^5 Па). Измерить давление света — очень сложная и трудная задача. Впервые это удалось П. Н. Лебедеву в 1900 г.

Задача. Считая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найти радиус частицы, при котором гравитационное притяжение ее к Солнцу будет компенсироваться силой светового давления. Мощность светового излучения Солнца $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, плотность частицы $\rho = 1,0$ г/см³. Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Решение. Запишем равенство сил тяготения и давления

$$F_{\text{тяг}} = F_{\text{давл}}. \quad (1)$$

По закону всемирного тяготения

$$F_{\text{тяг}} = G \frac{m M_C}{R^2}, \quad (2)$$

где R — расстояние от частицы до Солнца, m — масса частицы. Ее можно представить в виде

$$m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где r — радиус частицы.

В п. 4.6 (задача 2) мы выяснили, что при падении плоской волны на шар его можно заменить диском того же радиуса. Это значит, что силу светового давления можно записать в виде

$$F_{\text{давл}} = p \pi r^2 = \frac{I}{c} \pi r^2.$$

Нам нужно найти интенсивность светового излучения на расстоянии R от Солнца. Сделаем это так. Мощность излучения Солнца известна — это энергия, которую излучает Солнце в единицу времени. Представим себе сферическую поверхность радиуса R (ее площадь $4\pi R^2$). Поток энергии Φ через нее (т. е. энергия, проходящая через эту поверхность в единицу времени) равен энергии, излучаемой Солнцем в единицу времени, т. е. мощности излучения. Интенсивность — это поток энергии через единичную поперечную площадку, поэтому

$$I = \frac{\Phi}{4\pi R^2} = \frac{P}{4\pi R^2}.$$

Итак,

$$F_{\text{давл}} = \frac{I}{c} \pi r^2 = \frac{P}{4cR^2} r^2. \quad (3)$$

Нам осталось лишь подставить формулы (2) и (3) в равенство (1)

$$G \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3 M_c}{R^2} = \frac{P}{4cR^2} r^2$$

и найти радиус частицы

$$r = \frac{3P}{16\pi G \rho M_c} = 0,6 \text{ мкм.}$$

4.8. ПОВЕДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, падающую нормально на границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Падение происходит из первой среды. Их магнитные проницаемости примем равными единице — известно, что волны распространяются в немагнитных средах. На границе волна частично проходит границу раздела и частично отражается от нее (рис. 4.13), поэтому, исходя из закона сохранения энергии, приходим к равенству

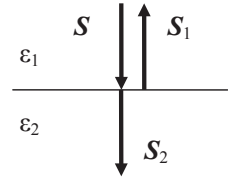


Рис. 4.13

$$S = S_1 + S_2,$$

где S , S_1 и S_2 — плотности потоков энергии падающей, отраженной и прошедшей волн (т. е. модули соответствующих векторов Пойнтинга). Запишем их в виде (4.56)

$$S = EH = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0}} E^2; \quad S_1 = E_1 H_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0}} E_1^2; \quad S_2 = E_2 H_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\mu_0}} E_2^2$$

и подставим в исходное равенство:

$$\sqrt{\epsilon_1} E^2 = \sqrt{\epsilon_1} E_1^2 + \sqrt{\epsilon_2} E_2^2. \quad (4.64)$$

Используем обозначение, применяемое в оптике, — запишем $\sqrt{\epsilon} = n$ и назовем эту величину *показателем преломления среды*. Ее физический смысл легко понять из формулы (4.36):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c}{n}. \quad (4.65)$$

Показатель преломления n показывает во сколько раз скорость света в среде меньше, чем в вакууме.

Итак, уравнение (4.64) принимает вид

$$n_1 E^2 = n_1 E_1^2 + n_2 E_2^2. \quad (4.66)$$

Воспользуемся граничными условиями для тангенциальных составляющих векторов \mathbf{E} этих трех волн

$$(\mathbf{E} + \mathbf{E}_1)_\tau = \mathbf{E}_{2\tau} \quad (4.67)$$

и учтем, что в поперечных волнах все эти вектора параллельны границе раздела, и поэтому равенство проекций эквивалентно векторному равенству

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2. \quad (4.68)$$

Выразим из него

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}, \quad (4.69)$$

подставим в выражение (4.66)

$$n_1 E^2 = n_1 (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E})^2 + n_2 E_2^2$$

и после несложных преобразований получим

$$\mathbf{E}_2 = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}. \quad (4.70)$$

Из этого выражения следует, что вектора \mathbf{E} и \mathbf{E}_2 всегда сонаправлены. Это значит, что оба вектора колеблются *синфазно*, т. е. при прохождении границы раздела фаза не испытывает скачка.

Подставим выражение (4.70) в равенство (4.69) и найдем

$$\mathbf{E}_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{E}. \quad (4.71)$$

Если $n_1 > n_2$, то при отражении от границы раздела фаза также не претерпевает скачка. Но ситуация изменяется, если $n_1 < n_2$.

В этом случае направления векторов E и E_1 противоположны в любой момент времени, а это означает, что при отражении от *оптически более плотной среды* фаза волны скачком изменяется на π . Это эквивалентно сдвигу волны на величину, равную половине длины волны.

Полученные результаты пригодятся нам в дальнейшем при изучении интерференции световых волн, отраженных от тонких пленок.

Найдем *коэффициент отражения* ρ волны. По определению

$$\rho = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}},$$

где $I_{\text{отр}}$ и $I_{\text{пад}}$ — интенсивности падающей и отраженной волны.

Как следует из выражений (4.58) и (4.47),

$$I = \frac{E_m H_m}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0 \mu}} E_m^2 \sim \sqrt{\epsilon} E_m^2 = n E_m^2.$$

Поэтому

$$\rho = \frac{n_1 E_{1m}^2}{n_1 E_m^2}$$

и согласно формуле (4.71)

$$\rho = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (4.72)$$

Любопытно, что коэффициент отражения не зависит от того, из какой среды падает волна на границу раздела: из первой или второй.

Аналогично можно определить и *коэффициент пропускания* τ волны:

$$\tau = \frac{I_{\text{прелом}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (4.73)$$

Легко проверить, что $\rho + \tau = 1$, что вполне естественно.

4.9. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является *осциллирующий диполь*, электрический дипольный момент которого изменяется по закону

$$p = p_m \cos \omega t. \quad (4.74)$$

Сделать это можно двумя способами — либо изменять по гармоническому закону расстояние между зарядами, либо величину самих зарядов, образующих диполь. Конфигурация поля вблизи диполя очень сложная, ее рассматривать не будем. Воспользуемся двумя условиями, сильно упрощающими задачу. Во-первых, будем считать, что размеры диполя много меньше длины излучаемой волны ($l_m \ll \lambda$). Такой диполь называется *элементарным* (или диполем Герца). Во-вторых, будем рассматривать поле на расстояниях, значительно превышающих длину волны излучения ($r \gg \lambda$). Эту область пространства называют *волновой зоной*.

Опыт показывает, что в волновой зоне электромагнитная волна является сферической, но амплитудные значения E_m и H_m зависят не только от r , но и от угла θ между осью диполя и радиус-вектором \mathbf{r} точки наблюдения:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \theta.$$

Таким образом, интенсивность волны будет зависеть от r и θ по закону

$$I(r, \theta) = \frac{E_m H_m}{2} \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta, \quad (4.75)$$

который при $r = \text{const}$ записывают в виде

$$I(\theta) = I_m \sin^2 \theta, \quad (4.76)$$

где I_m — интенсивность волны в *экваториальной плоскости* диполя (при $\theta = \pi/2$) на расстоянии r от диполя. Зависимость $I(\theta)$ обычно изображают в полярных координатах (рис. 4.14) и называют *диаграммой направленности* излучения диполя. Она позволяет графически определить значение $I(\theta)$ как длину отрезка, проведенного из начала координат до пересечения с линией диаграммы.

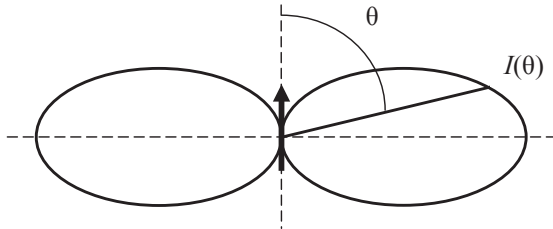


Рис. 4.14

Расчеты показывают, что мощность P излучения диполя, т. е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу времени, описывается формулой

$$P = \gamma \ddot{p}^2, \quad (4.77)$$

где γ — постоянная, равная $\mu_0 / 6\pi c$. С учетом формулы (4.74) получим

$$\ddot{p} = \gamma \omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t.$$

Перейдем к средней мощности излучения:

$$P = \gamma \omega^4 p_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} \gamma \omega^4 p_m^2. \quad (4.78)$$

Получили важный результат: средняя мощность очень сильно зависит от частоты (частота в четвертой степени!). Это по-

звolyет конструировать компактные радиопередающие устройства вполне достаточной мощности.

Формулу (4.77) можно проанализировать и с другой точки зрения. Если заряды, образующие диполь, двигаются с ускорением, то его дипольный момент можно представить так:

$$p = ql = q(r_+ - r_-),$$

где r_+ и r_- — радиус-векторы зарядов q и $-q$. Тогда

$$\ddot{p} = q(a_+ - a_-).$$

Пусть заряд q движется, а $-q$ — покоится:

$$\ddot{p} = qa_+.$$

Тогда

$$P = \gamma q^2 a_+^2. \quad (4.79)$$

Это известная формула, описывающая мощность излучения ускоренно движущегося заряда. Надо учесть, однако, что она справедлива лишь для нерелятивистских скоростей движения зарядов ($v \ll c$). Учитывать это явление приходится при ускорении заряженных частиц в так называемых циклических устройствах, таких, например, как бетатрон. Здесь возникает естественный предел для энергии ускоряемой частицы, когда энергия, сообщаемая частице за период, становится равной энергии излучения.

Задача 1. В направлении максимального излучения на расстоянии $r_0 = 10$ м от элементарного диполя (волновая зона) амплитуда напряженности электрического поля $E_{m0} = 6$ В/м. Найти среднее значение плотности потока энергии на расстоянии $r = 20$ м от диполя в направлении, составляющем угол $\vartheta = 30^\circ$ с его осью.

Решение. Среднее значение плотности потока энергии — это интенсивность волны I . На расстоянии r от диполя интенсивность определяется формулой (4.76), в которой

$$I_m = \frac{E_m H_m}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2.$$

Нам осталось выразить E_m через E_{m0} . Это сделать легко — в сферической волне амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально расстоянию от источника. Поэтому

$$\frac{E_m}{E_{m0}} = \frac{r_0}{r}, \quad E_m = E_{m0} \frac{r_0}{r}.$$

Подставляем эти выражения в формулу (4.76) и получаем ответ:

$$I(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{m0}^2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sin^2 \theta = 3 \text{ мВт/м}^2.$$

Задача 2. Электромагнитная волна, излучаемая элементарным диполем, распространяется в вакууме так, что в волновой зоне на луче, перпендикулярном оси диполя, на расстоянии r от него, среднее значение плотности потока энергии равно I_m . Найти среднюю мощность излучения диполя.

Решение. В волновой зоне волна будет сферической. Выберем мысленную поверхность в виде сферы радиуса r , в центре которой находится диполь (рис. 4.15). Средняя мощность излучения диполя — это энергия, излучаемая диполем в единицу времени, и эта энергия переносится через выбранную

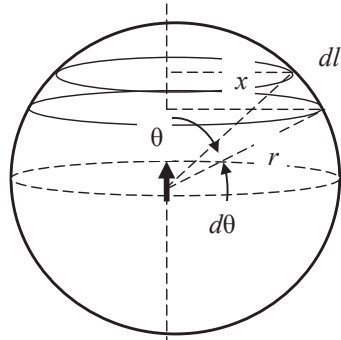


Рис. 4.15

нами поверхность. Таким образом, средняя мощность излучения диполя равна *среднему потоку энергии* волны Φ через поверхность сферы, а его можно рассчитать по формуле

$$\Phi = \int_S IdS.$$

Интенсивность волны I определяется по формуле (4.76) и зависит от угла θ , поэтому в качестве элемента поверхности dS возьмем площадь кольца радиуса x ($x = r\sin\theta$) и толщиной dl ($dl = r d\theta$). Тогда $dS = 2\pi x dl = 2\pi r^2 \sin\theta d\theta$. Вычислим этот интеграл:

$$\Phi = 2\pi r^2 I_m \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -2\pi r^2 I_m \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{8\pi}{3} r^2 I_m.$$

Задача 3. Нерелятивистская заряженная частица движется в поперечном однородном магнитном поле с индукцией B . Найти закон убывания (за счет излучения) кинетической энергии частицы во времени. Через сколько времени ее кинетическая энергия уменьшится в e раз?

Решение. В этой задаче говорится о важном физическом явлении — любой ускоренно движущийся заряд q излучает электромагнитные волны, теряя при этом свою кинетическую энергию. Мощность излучения определяется по формуле (4.79). В нашем случае заряд движется по окружности под действием силы Лоренца и его центростремительное ускорение легко определить по второму закону Ньютона:

$$ma = qvB, \quad a = \frac{qvB}{m}.$$

Мощность излучения — это энергия, теряемая зарядом в единицу времени (4.79), т. е.

$$\frac{dW_k}{dt} = -P = -\lambda q^2 a^2 = -2\lambda \frac{q^4 B^2}{m^3} W_k.$$

В последнем выражении было учтено, что $W_k = mv^2 / 2$.

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначение

$$\alpha = 2\lambda \frac{q^4 B^2}{m^3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dW_k}{dt} &= -\alpha W_k, & \frac{dW_k}{W_k} &= -\alpha dt, \\ \int_{W_{k0}}^{W_k} \frac{dW_k}{W_k} &= -\int_0^t \alpha dt, \\ \ln \frac{W_k}{W_{k0}} &= -\alpha t, \\ W_k &= W_{k0} e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Получили ответ на первый вопрос — нашли зависимость кинетической энергии частицы от времени. Вторая часть задачи решается легко:

$$W_k = \frac{W_{k0}}{e}, \quad \alpha t_0 = 1, \quad t_0 = 1 / \alpha.$$

4.10. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим излучение диполя в его *экваториальной плоскости*, т. е. в плоскости, перпендикулярной его оси (см. рис. 4.16, *а*). Согласно формуле (4.76) интенсивность его излучения в этой плоскости будет одинакова по всем направлениям и равна I_m .

Рассмотрим теперь систему из двух параллельных когерентных излучателей 1 и 2, отстоящих друг от друга на расстоянии d (на рис. 4.16, *б* они изображены перпендикулярно плоскости чертежа, которая совпадает с экваториальной).

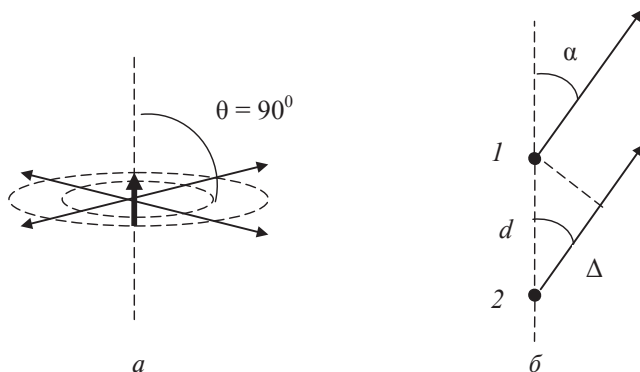


Рис. 4.16

Напомним, что *когерентными* называются источники, возбуждающие в точке наблюдения колебания равной частоты и постоянной разности фаз. Проанализируем результат наложения волн, излучаемых этими источниками в их экваториальной плоскости. Выберем два *практически* параллельных луча, идущих от них под углом α к оси этой системы и будем считать, что их наложение произойдет в волновой зоне на расстоянии $r \gg d$. Разность хода Δ этих лучей равна

$$\Delta = d \cos \alpha. \quad (4.80)$$

В результате этой разности хода у колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения, появляется разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \alpha. \quad (4.81)$$

Эти колебания будут максимально усиливать друг друга, если $\delta = 2\pi m$, т. е.

$$d \cos \alpha = m\lambda. \quad (4.82)$$

Это условие называется *условием максимума интенсивности*.

В случае $\delta = 2\pi m + \pi = 2\pi(m + 1/2)$ колебания будут максимально ослаблять друг друга. В этом случае равенство (4.81) принимает вид

$$d \cos \alpha = (m + 1/2)\lambda \quad (4.83)$$

и носит название *условия минимума интенсивности*.

В наших рассуждениях мы молчаливо предполагали, что оба излучателя колеблются *синфазно*, т. е. с одинаковой фазой. Рассмотрим случай, когда их колебания происходят с некоторой разностью фаз — допустим, колебания второго излучателя отстают по фазе на φ . В этом случае формула (4.81) запишется в виде

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos \alpha + \varphi. \quad (4.84)$$

При этом изменится условие максимума

$$d \cos \alpha = \left(m - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \lambda \quad (4.85)$$

и минимума интенсивности

$$d \cos \alpha = \left(m + \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \lambda. \quad (4.86)$$

Итак, при наложении когерентных волн происходит как усиление, так и ослабление результирующих колебаний согласно условиям (4.82)–(4.86). Это явление носит название *интерференции электромагнитных волн*.

Задача 1. Система, состоящая из двух когерентных излучателей, изображена на рис. 4.16, б. Длина волны излучения λ . Имея в виду, что колебания излучателя 2 отстают по фазе на φ ($\varphi < \pi$) от колебаний излучателя 1, найти условия, при которых в направлении $\alpha = \pi$ интенсивность излучения будет максимальна, а в противоположном направлении — минимальна.

Решение. Воспользуемся уравнениями (4.85) и (4.86) и с учетом условий данной задачи запишем их в виде

$$-1 = \left(m_1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \frac{\lambda}{d}, \quad (1)$$

$$1 = \left(m_2 + \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \frac{\lambda}{d}. \quad (2)$$

Сложив эти равенства, после несложных преобразований получим

$$\frac{\varphi}{\pi} = (m_1 + m_2) + \frac{1}{2}.$$

В левой части этого уравнения стоит положительная величина, меньше единицы, а это означает, что сумма целых чисел, стоящая в скобках, должна быть равна нулю. Поэтому $\varphi = \pi/2$. Тогда из уравнения (2) следует, что

$$\frac{d}{\lambda} = m_2 + \frac{1}{4}.$$

Итак, получили два условия, при которых в направлении $\alpha = \pi$ интенсивность излучения будет максимальна, а в противоположном направлении — минимальна:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d}{\lambda} = m_2 + \frac{1}{4}, \quad m_2 = 0, 1, 2, \dots$$

Задача 2. Неподвижная система состоит из линейной цепочки параллельных излучателей (см. рис. 4.17), отстоящих друг от друга на расстояние d , причем фаза колебаний излучателей линейно меняется вдоль цепочки. Найти зависимость от времени разности фаз φ между соседними излучателями, при которой главный максимум излучения системы будет совершать круговой «обзор» местности с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. Согласно условию максимума интенсивности

$$d \cos \alpha = \left(m - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \lambda, \quad (1)$$

и для того чтобы главный максимум излучения системы совершал круговой «обзор» местности с постоянной угловой скоростью ω , нужно, чтобы $\alpha = \omega t$. После простых преобразований получаем ответ:

$$\varphi = 2\pi \left(m - \frac{\lambda}{d} \cos \omega t \right), m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Осталось обсудить один вопрос — почему в условии говорится о *главном* максимуме? В этой задаче представлен случай *многолучевой интерференции*. Как показывают расчеты, в этом случае интерференционная картина имеет довольно сложный вид — наряду с главными максимумами большой интенсивности (она пропорциональна квадрату числа источников) наблюдаются достаточно слабые добавочные максимумы.

Задача 3. Изобразить примерный вид полярной диаграммы направленности излучения в экваториальной плоскости системы, состоящей из двух одинаковых излучателей, дипольные моменты которых расположены параллельно на расстоянии $d = \lambda$ друг от друга и

- совпадают по фазе;
- противоположны по фазе.

Решение. Определим направления, в которых интенсивность излучения будет максимальной. Для этого воспользуемся формулой (4.85). В первом случае ее можно записать как

$$\cos \alpha = m,$$

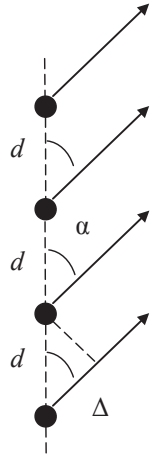


Рис. 4.17

и это уравнение имеет решение при значениях $m = 0, \pm 1$, которым соответствуют углы $\alpha = 0, \pi$ и $\pm \pi/2$.

Условие минимума (4.86) в этом случае принимает вид

$$\cos \alpha = m + \frac{1}{2},$$

и решение этого уравнения возможно при $m = 0$ и -1 . При этом $\alpha = \pm \pi/3$ и $\pm 2\pi/3$. Примерный вид полярной диаграммы направленности излучения в этом случае изображен на рис. 4.18, а.

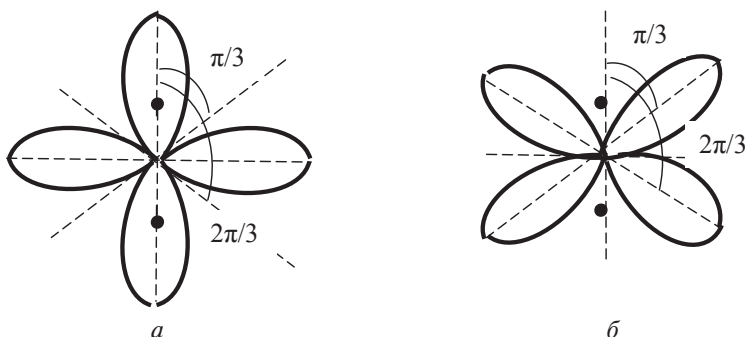


Рис. 4.18

Во втором случае $\varphi = \pi$, и условия максимума и минимума интенсивности излучения принимают вид

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= m - \frac{1}{2}, \\ \cos \alpha &= m \end{aligned}$$

соответственно.

Их решение приводит к диаграмме, приведенной на рис. 4.18, б. Направления максимальной интенсивности излучения в этом случае совпали с направлениями минимума излучения в первом случае (и наоборот).

4.11. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Изучая упругие волны, обнаружили, что частота, регистрируемая приемником колебаний, в общем случае не совпадает с частотой колебаний, излучаемой источником, и это отличие определяется скоростями движения приемника и источника *относительно среды*, в которой распространяется волна. Это явление, получившее название *эффекта Доплера* для упругих волн (акустического эффекта Доплера), описано в п. 3.10. Для электромагнитных волн нет особой среды, которая была бы их носителем, поэтому доплеровское смещение частоты электромагнитных волн (сигналов) определяется только скоростью источника *относительно приемника*.

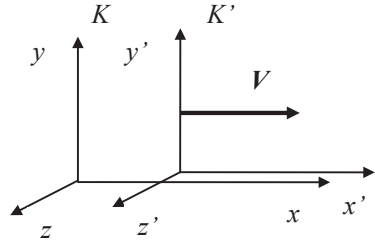


Рис. 4.19

Получим формулы преобразования частоты и волнового вектора при переходе из одной системы отсчета к другой (рис. 4.19). Пусть в лабораторной системе отсчета K электромагнитная волна характеризуется значениями частоты ω и волнового вектора \mathbf{k} и имеет фазу $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$. Система K' движется относительно K со скоростью V в направлении оси x . В этой системе отсчета частота, волновой вектор и фаза имеют значения ω' , \mathbf{k}' , $\omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{r}' = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'$ соответственно.

Совершим переход из системы K' в систему K . Электромагнитная волна является ультрарелятивистским объектом, поэтому воспользуемся *преобразованиями Лоренца*:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - Vx / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}.$$

И после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' = \\ = \frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} t - \frac{k'_x + \omega' V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} x - k'_y y - k'_z z. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в системе K величины ω и k связаны с величинами ω' и k' соотношениями:

$$\omega = \frac{\omega' + k'_x V}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad (4.87)$$

$$k_x = \frac{k'_x + \omega' V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \quad k_y = k'_y, \quad k_z = k'_z. \quad (4.88)$$

Пусть в системах K и K' волновой вектор образует углы α и α' с осями x и x' соответственно, т. е.

$$k_x = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha; \quad k'_x = k' \cos \alpha' = \frac{\omega'}{c} \cos \alpha'. \quad (4.89)$$

Тогда выражение (4.87) принимает вид

$$\omega = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \quad (4.90)$$

Преобразуем формулу (4.88) с учетом соотношений (4.89) и (4.90):

$$\frac{\omega}{c} \cos \alpha = \frac{\frac{\omega'}{c} \cos \alpha' + \frac{\omega' V}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}},$$

$$\frac{\omega'}{c} \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cos \alpha = \frac{\frac{\omega'}{c} \cos \alpha' + \frac{\omega' V}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha'}. \quad (4.91)$$

Формула (4.90) описывает *эффект Доплера* для электромагнитных волн, в основе которого лежит *изменение частоты волн* при переходе из одной системы отсчета в другую, движущуюся относительно первой.

Рассмотрим несколько важных частных случаев.

1. Источник приближается к приемнику, двигаясь в направлении оси x (см. рис. 4.20, *а*). В этом случае $\alpha' = 0$ и частота, регистрируемая приемником, определяется выражением

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}} \frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega_{\text{ист}} \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > \omega_{\text{ист}}. \quad (4.92)$$

2. Источник удаляется от приемника, двигаясь в направлении оси x . Тогда $\alpha' = \pi$ (см. рис. 4.20, *б*) и формула (4.90) принимает вид

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}} \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \omega_{\text{ист}} \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} < \omega_{\text{ист}}. \quad (4.93)$$

Рассмотренные ситуации относятся к *продольному* эффекту Доплера и наблюдаются как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях. Действительно, при $V^2/c^2 \ll 1$

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}} \left(1 \pm \frac{V}{c} \right). \quad (4.94)$$

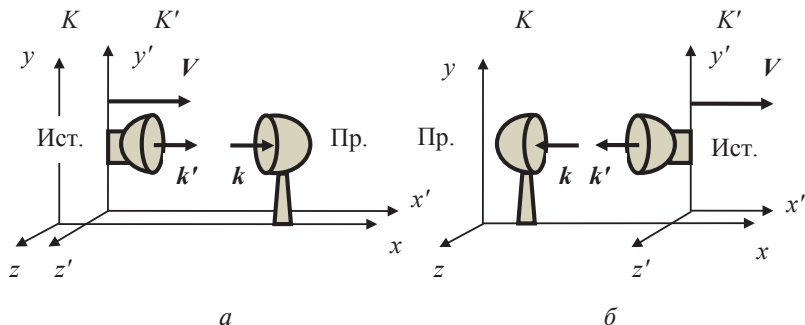


Рис. 4.20

3. Источник движется *мимо* приемника в направлении оси x , излучая в поперечном направлении (см. рис. 4.21). В этом случае $\alpha' = \pi/2$ и формулы (4.90) и (4.91) принимают вид:

$$\omega_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{ист}}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} < \omega_{\text{ист}}, \quad (4.95)$$

$$\cos \alpha = \frac{V}{c}, \quad (4.96)$$

и мы получаем *поперечный* эффект Доплера. Это релятивистский эффект — если $V^2/c^2 \ll 1$, то $\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}}$, $\cos \alpha = 0$, $\alpha = \alpha' = \pi/2$. Он является прямым следствием замедления времени — темп хода движущихся часов оказывается более медленным, чем темп хода часов в лабораторной системе отсчета.

Формула (4.91) указывает на то, что если $\alpha \neq 0$, то при переходе из одной системы отсчета в другую может изменяться направление распространения волны. Такое явление называется *абберацией*. Абберация приводит, например, к изменению видимых положений звезд вследствие вращения Земли (суточная абберация света), вращения Земли вокруг Солнца (годовая абберация). Эти изменения происходят потому, что из-за названных движений по отношению к земному наблюдателю по-

стоянно изменяются как направление световых лучей, идущих от каждой звезды, так и видимая скорость ее перемещения. Именно этот эффект позволил открыть двойные звезды (системы, состоящие из двух звезд, движущихся вокруг общего центра масс) — объекты, которые невозможно разрешить даже самыми мощными телескопами.

С помощью эффекта Доплера Хаббл (1929 г.) обнаружил явление, названное *космологическим красным смещением*: линии в спектре излучения внегалактических объектов смещены в сторону больших длин волн, т. е. в красноволновую часть спектра. Оно свидетельствует о том, что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики со скоростями, пропорциональными расстоянию до них, причем в последнее время зафиксированы скорости разлета порядка 200 000 км/с! На основе этих данных создана теория Большого взрыва, согласно которой наша Вселенная, или по крайней мере видимая ее часть, родилась примерно 13,7 миллиардов лет назад.

Эффект Доплера нашел многочисленные практические применения. С его помощью определяют, например, скорости самолетов и ракет. Он лежит в основе измерения скорости излучающих атомов в пучке, угловой скорости вращения Солнца и т. д.

Задача 1. Радиолокатор работает на частоте ν_0 . Найти скорость v приближающегося самолета, если частота биений между сигналами передатчика и отраженными от самолета равна $\Delta\nu$ (в месте расположения локатора).

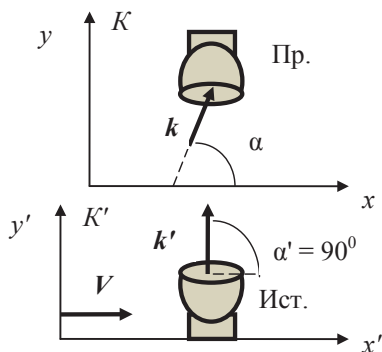


Рис. 4.21

Решение. Скорость самолета, естественно, значительно меньше скорости света, поэтому мы имеем дело с нерелятивистским эффектом Доплера. Частота сигнала ν_1 , воспринимаемого самолетом как приемником, который приближается к источнику (локатору), определяется формулой (4.94):

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

Сигналы этой же частоты самолет отражает — уже как источник, движущийся к приемнику (локатору). При этом приемник зарегистрирует сигнал с частотой ν_2 :

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{v}{c} \right) = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right)^2 \approx \nu_0 \left(1 + 2 \frac{v}{c} \right).$$

Частота биений определится как

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_0 = 2\nu_0 \frac{v}{c},$$

и, таким образом, скорость самолета

$$v = \frac{c\Delta\nu}{2\nu_0}.$$

Задача 2. При наблюдении спектральной линии $\lambda = 0,51$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8,0$ пм. Найти период T обращения Солнца вокруг своей оси.

Решение. Поскольку противоположные края диска при вращении Солнца движутся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью v , то доплеровское смещение этой линии будет одинаково по модулю, но противоположно по знаку. Поэтому суммарная разность смещенных частот равна удвоенному доплеровскому смещению. Согласно формуле (4.94)

$$\delta\nu = 2\nu_0 \frac{v}{c} = 2\nu_0 \frac{\omega R}{c} = \frac{4\pi\nu_0 R}{cT} = \frac{4\pi R}{\lambda T},$$

$$T = \frac{4\pi R}{\lambda \delta\nu},$$

где R — радиус Солнца, $R \approx 7 \div 10^8$ м.

Нам осталось выразить разность частот $\delta\nu$ через разность длин волн $\delta\lambda$. Сделать это несложно:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \delta\nu = -\frac{c\delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Знак минус в последнем равенстве не играет особой роли — он указывает на то, что с увеличением длины волны ее частота уменьшается. Поэтому можно записать ответ в виде

$$T = \frac{4\pi\lambda R}{c\delta\lambda} = 35 \text{ суток.}$$

Задача 3. Одна из спектральных линий, испускаемых возбужденными ионами He^+ в состоянии покоя, имеет длину волны λ . Если эту линию наблюдать под углом α к пучку данных ионов, то обнаруживается ее доплеровское смещение $\Delta\lambda < 0$, причем $|\Delta\lambda| \ll \lambda$. Определить скорость v ионов в пучке.

Решение. Условие $|\Delta\lambda| \ll \lambda$ означает, что движение носит нерелятивистский характер, поэтому можно воспользоваться формулой (4.90), записав ее в виде

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha' \right).$$

Тогда

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = \frac{\Delta\omega}{\omega'} = \frac{v}{c} \cos \alpha',$$

а поскольку

$$\lambda \sim \frac{1}{\omega}, \quad \frac{\Delta\omega}{\omega'} = \frac{\lambda'}{|\Delta\lambda|},$$

то

$$v = \frac{c|\Delta\lambda|}{\lambda' \cos \alpha'}.$$

Так как $\Delta\lambda < 0$, то $\Delta\omega > 0$, $\omega > \omega'$, а это означает, что $\cos \alpha' > 0$, т. е. $\alpha' < \pi/2$. Учитывая, что при нерелятивистских скоростях $\lambda' = \lambda$, $\alpha' = \alpha$, получим ответ

$$v = \frac{c|\Delta\lambda|}{\lambda \cos \alpha}.$$

Задача 4. С какой скоростью v должна была бы двигаться автомашина, чтобы красный свет светофора ($\lambda_0 = 0,70$ мкм) воспринимался как зеленый ($\lambda = 0,55$ мкм) (анекдот о Вуде).

Известный физик-экспериментатор Роберт Вуд жил в середине прошлого столетия и помимо научных достижений был известен как человек, с которым случались различные забавные истории, некоторые из них напоминали анекдот. Однажды полицейский остановил Вуда за езду на красный свет. Вуд, пытаясь оправдаться, рассказал, что при движении навстречу к источнику красного цвета из-за эффекта Доплера этот цвет вполне мог показаться ему зеленым. Тогда образованный полицейский оштрафовал Вуда за превышение скорости.

Решение. Согласно формуле (4.92)

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_{\text{ист}} \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Откуда

$$\left(\frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega_{\text{ист}}} \right)^2 = \frac{1+v/c}{1-v/c},$$

$$v/c = \frac{\left(\frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega_{\text{ист}}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega_{\text{ист}}}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 + 1} = 0,31.$$

В результате получаем $v \approx 9 \cdot 10^4$ км/с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	4
1.1. Одномерный гармонический осциллятор.....	4
1.2. Анализ гармонических колебаний.....	13
1.3. Математический и физический маятники.....	17
1.4. Осциллятор с трением. Затухающие колебания	24
1.5. Вынужденные колебания. Резонанс.....	34
1.6. Представление гармонических колебаний в комплексной форме	45
1.7. Сложение гармонических колебаний одного направления. Биения.....	48
1.8. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу	52
1.9. Колебания связанных систем. Нормальные колебания	56
Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	66
2.1. Колебательный контур. Уравнение колебательного контура	66
2.2. Свободные незатухающие колебания.....	68
2.3. Свободные затухающие колебания	76
2.4. Вынужденные электромагнитные колебания	82
2.5. Переменный ток.....	88

Глава 3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ.....	92
3.1. Упругие волны. Уравнение плоской волны	92
3.2. Стоячие волны.....	99
3.3. Колебания струны	103
3.4. Волновое уравнение	110
3.5. Скорость упругой волны в твердой среде.....	112
3.6. Скорость звука в газах	114
3.7. Энергия упругой волны.....	119
3.8. Перенос энергии упругой волной.....	121
3.9. Уравнение сферической волны	123
3.10. Упругие волны в реальных средах.....	126
3.11. Эффект Доплера	128
 Глава 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	 136
4.1. Уравнения Максвелла	136
4.2. Дифференциальная форма уравнений Максвелла	151
4.3. Волновое уравнение для электромагнитного поля	154
4.4. Свойства электромагнитных волн.....	157
4.5. Стоячая электромагнитная волна.....	160
4.6. Энергия электромагнитной волны	162
4.7. Импульс электромагнитной волны	171
4.8. Поведение электромагнитных волн на границе двух сред	 175
4.9. Излучение электромагнитных волн	178
4.10. Интерференция электромагнитных волн.....	183
4.11. Эффект Доплера для электромагнитных волн	189

Учебное издание

Малышев Леонид Григорьевич
Повзнер Александр Александрович

**ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ КУРСА ФИЗИКИ.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ**

Редактор Н. П. Кубыщенко
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 09.02.2017. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 8,1. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 50 экз.
Заказ 42

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

